中心球空穴迁移算子的谱理论

陽名珠　朱广田　韦梓楚

（中国科学院数学研究所）

本文研究带有中心球空穴的球形介质，在散射和裂变是各向同性的情况下，与时间有关的单能中子迁移算子的谱的性质。证明了迁移算子的占优本征值的存在及与此有关的一些结果，也给出了可供实际工作参考的关于占优本征值的一些估计。对脉冲中子实验所测量的有关系统存在基态衰变常数（即占优本征值）提供了理论根据。

一、緒　　言

考虑有界凸的封闭曲面 Γ_V 所围成的介质体 V。如果 V 被完全吸收介质所包围，那么 V 中与时间有关的、散射和裂变是各向同性的单能中子迁移可由积-微分方程[1]

$$\frac{\partial\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)}{\partial t}+\vec{\Omega}\cdot\nabla\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\Sigma(\vec{r})\,\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\frac{c(\vec{r})}{4\pi}\int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi(\vec{r},\vec{\Omega}',t)\,d\vec{\Omega}' \tag{1.1}$$

来描述，它具定解条件

$$\lim_{t\to+0}\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)=f(\vec{r},\vec{\Omega}), \tag{1.2}$$

$$\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)=0,\quad r\in\Gamma_V,\ \cos\widehat{(\vec{n},\vec{\Omega})}<0。 \tag{1.3}$$

这里 $\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)$ 是中子分布，它依赖于空间位置向量 $\vec{r}\in V$，沿速度 $\vec{v}$ 方向的单位向量 $\vec{\Omega}=\vec{v}/|\vec{v}|$（我们已设 $|\vec{v}|=1$），时间 $t\in[0,\infty)$。$V_{\vec{\Omega}}$ 为单位球面。$\widehat{(\vec{n},\vec{\Omega})}$ 表向量 $\vec{n}$ 与向量 $\vec{\Omega}$ 之间的夹角，$\vec{n}$ 是点 $\vec{r}\in\Gamma_V$ 处外法线方向的单位向量。增殖因子 $c(\vec{r})=\Sigma_s(\vec{r})+\nu\Sigma_f(\vec{r})$，$\nu$ 是每次裂变产生中子的平均数目。$\Sigma(\vec{r})$，$\Sigma_s(\vec{r})$，$\Sigma_f(\vec{r})$ 分别表总截面，散射截面和裂变截面。

在相空间 $G=V\times V_{\vec{\Omega}}$ 引入勒贝格（Lebesque）测度。令 $\Sigma(\vec{r})$，$\Sigma_s(\vec{r})$，$\Sigma_f(\vec{r})$ 均为非负有界可测实函数。取在 G 上绝对值平方可积复值函数之全体所组成的希尔伯特（Hilbert）空间 H，它的内积和范数定义为

$$(\psi,\varphi)=\int_V\int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi(\vec{r},\vec{\Omega})\,\overline{\varphi(\vec{r},\vec{\Omega})}\,d\vec{r}\,d\vec{\Omega},\qquad \|\psi\|^2=\int_V\int_{V_{\vec{\Omega}}}|\psi(\vec{r},\vec{\Omega})|^2\,d\vec{r}\,d\vec{\Omega}。$$

令 $\mathfrak{A}\psi$ 表（1.1）式中积-微分表示式

$$\mathfrak{A}\psi=-\vec{\Omega}\cdot\nabla\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)-\Sigma(\vec{r})\,\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\frac{c(\vec{r})}{4\pi}\int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi(\vec{r},\vec{\Omega}',t)\,d\vec{\Omega}', \tag{*}$$

则方程（1.1）可视为空间 H 的算子方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial t}=\boldsymbol{A}\,\psi,\\&\text{迁移算子}\ \boldsymbol{A}\cdot\equiv-\vec{\Omega}\bullet\nabla\cdot-\Sigma(\vec{r})\cdot+\frac{c(\vec{r})}{4\pi}\int_{\mathbf{V}_{\vec{\Omega}}}\cdot\,d\vec{\Omega}',\\&\boldsymbol{A}\ \text{之定义域}\ D(\boldsymbol{A})=\{\psi|\quad \text{i)}\ \psi\in H;\quad \text{ii)}\ \mathfrak{A}\psi\in H;\\&\qquad\qquad \text{iii)}\ \psi\ \text{满足边界条件}(1.3)\}.\end{aligned}\right\}\qquad(1.1\text{a})$$

那么，对算子方程(1.1 a)的抽象初值问题之解的研究就必然要导致对波耳兹曼(Boltzmann)迁移算子 $\boldsymbol{A}$ 的谱的性质之研究，特别是离散的有限重的点谱(本文仅只称这样的点谱为本征值)的研究，也就是说，要去求使方程

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\psi=0\qquad[\text{其中}\psi\in D(\boldsymbol{A}),\ \boldsymbol{I}\text{为单位算子}]\qquad(1.4)$$

存在非零解的那些 λ。

约更斯(K. Jörgens)[2]在更为一般的情况下讨论了方程(1.1 a)的初值问题的适定性。他证明了 $\boldsymbol{A}$ 是强连续半群 $\boldsymbol{E}(t)(t\geqslant0)$的无穷小母元，若初始分布 $f(\vec{r},\vec{\Omega})\in D(\boldsymbol{A})$，则方程(1.1 a)有唯一解 $\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\boldsymbol{E}(t)f(\vec{r},\vec{\Omega})$，对任意固定的 $t\geqslant0$，$\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)\in D(\boldsymbol{A})$。$\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)$可表为$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}f$的逆拉普拉斯(Laplace)变换

$$\psi=\boldsymbol{E}(t)f=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\xi\to\infty}\int_{\eta-i\xi}^{\eta+i\xi}e^{\lambda t}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}fd\lambda,\qquad(1.5)$$

这里积分是黎曼(Riemann)和的强极限；$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$是算子 $\boldsymbol{A}$ 的豫解算子。约更斯从分析半群算子 $\boldsymbol{E}(t)$的谱的性质入手，应用谱映象原理，证明了在空间 H，迁移算子 $\boldsymbol{A}$ 在复平面的任何平行于虚轴的有限宽度的带中如果存在谱点，则只能是有限多个本征值，每个本征值所对应的根子空间是有穷维的。

今设迁移算子 $\boldsymbol{A}$ 有按其实部代数的大小排列成渐减形式的本征值 $\lambda_0,\lambda_1\cdots$，相应于它们的有穷维根子空间分别以 $\mathfrak{N}_{\lambda_0},\mathfrak{N}_{\lambda_1},\cdots$表示。令 $\boldsymbol{P}_j$ 为空间 H 到子空间 $\mathfrak{N}_{\lambda_j}$ 的投影，$j=0,1,\cdots$。那么，初值问题的解(1.5)有渐近展式[2]

$$\psi\sim\sum_j\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{P}_jf,\qquad(1.6)$$

$$\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{P}_jf=e^{\lambda_jt}\sum_k q_k(f)h_k(t)\varphi_k,\qquad(1.7)$$

此处 $q_k(f)$是有界线性泛函，$h_k(t)$是 t 的多项式，$\{\varphi_k\}$在 $\mathfrak{N}_{\lambda_j}$ 中构成一基。

物理上有兴趣的是占优本征值(Dominant Eigenvalue)的存在。本征值 λ_0 是所谓占优的，即是说它是实的，代数地大于其他任何本征值的实部的一个简单的本征值，与它相应的唯一的(除一常数因子外)本征函数 $\psi_0(\vec{r},\vec{\Omega})$在相空间 G 中几乎处处为正，异于 λ_0 的任何本征值没有在相空间 G 中几乎处处为非负的本征函数。物理上称这样的 $-\lambda_0$ 为所谓的基本模型衰变常数(Fundamental Mode Decay Constant)[3]，称这样的 ψ_0 为基本模型(Fundamental Mode)，它们的存在是中子脉冲实验的理论基础。因为占优本征值 λ_0 所对应的根子空间 $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ 是一个一维的本征子空间，所以(1.6)式右边级数的第一项可写为$e^{\lambda_0t}(f,\psi_0^*)\psi_0$，这里 ψ_0^*是算子 $\boldsymbol{A}$ 的共轭算子 $\boldsymbol{A}^*$ 相应于本征值 λ_0 的本征函数。因此，如果占优本征值 λ_0 存在，则随 t 之无限增，(1.6)式视 λ_0 之为正、为负、为零而刻划出中

子分布密度的增大、减小、稳定的变化规律。特别，如果$\lambda_0=0$，则随t之无限增，(1.6)式成为

$$\psi \sim (f,\psi_0^*)\psi_0,$$

中子分布$\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)$近似地完全取决于与时间无关的基本模型$\psi_0(\vec{r},\vec{\Omega})$，方程(1.4)成为

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\psi_0(\vec{r},\vec{\Omega})+\Sigma(\vec{r})\psi_0(\vec{r},\vec{\Omega})=\frac{c(\vec{r})}{4\pi}\int_{\mathbf{V}_{\vec{\Omega}}}\psi_0(\vec{r},\vec{\Omega}')\,d\vec{\Omega}'.$$

这说明系统与时间无关地维持无外源的稳定状态，这时系统中中子的吸收和漏失完全可由散射和裂变所产生的中子来补充。这就是通常所说系统的临界状况，ψ_0是临界分布。

约更斯[2]给出了系统(1.1)—(1.3)的迁移算子$\boldsymbol{A}$的本征值存在的条件，但是他未讨论实本征值是否存在的问题。诺顿(R. Van Norton)[4]在加上$\mathbf{V}$是一均匀的球形介质的假设后，证明了迁移算子$\boldsymbol{A}$一定存在可数无穷多个以$-\infty$为唯一聚点的实本征值，但他没有讨论是否存在占优本征值的问题。维达夫(I. Vidav)[5]，乌卡(S. Ukai)等[6]各自独立地讨论了被完全吸收介质所包围的，有界凸的均匀介质体中，散射和裂变是各向同性的波耳兹曼迁移算子的占优本征值的存在问题。

本文研究了两个在实际工作中所遇到的非均匀介质的物理系统$\mathrm{I}^{(1)}$和$\mathrm{I}^{(2)}$，讨论了这两个物理系统的波耳兹曼迁移算子$\boldsymbol{A}^{(1)}$和$\boldsymbol{A}^{(2)}$的占优本征值的存在及它们的相互关系等问题。第二节，我们引出这两个系统，用泛函分析方法统一论述其散射和裂变是各向同性的单能中子迁移的这些系统，迁移算子的谱的性质；第三节，我们用算子理论证明这些迁移算子的占优本征值的存在，给出它们之间的关系；最后，在第四节，我们给出这些迁移算子的占优本征值，与均匀介质系统$\mathrm{I}^{(0)}$所对应的迁移算子$\boldsymbol{A}^{(0)}$的占优本征值之间的关系，并给出它们之间相互关系的估计。

二、中心球空穴迁移算子的谱

今假定有界凸的介质体$\mathbf{V}$是一半径为R_2的球体$\mathbf{V}_{R_2}$。

如果球$\mathbf{V}_{R_2}$的介质是均匀的，那么，方程(1.1)中函数$\Sigma(\vec{r})$和$c(\vec{r})$都是常数，以Σ和c表示，并称此物理系统为$\mathrm{I}^{(0)}$。

如果球$\mathbf{V}_{R_2}$的介质不均匀。设$\mathbf{V}_{R_2}$含一半径为$R_1(R_1<R_2)$的同心球$\mathbf{V}_{R_1}$，区城$\mathbf{V}_{R_1}$和$\mathbf{V}_{R_2}\setminus\mathbf{V}_{R_1}$是两种性质不同的均匀介质。特别，如以下系统$\mathrm{I}^{(1)}$所述，$\mathbf{V}_{R_1}$是一空穴(Cavity)的情况，在实际工作中是更为有意义的问题。

考虑以下两个系统：

系统$\mathrm{I}^{(1)}$：
$$\Sigma(\vec{r})=\Sigma_1(\vec{r})=\begin{cases}\Sigma, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_2}\setminus\mathbf{V}_{R_1},\\ 0, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_1},\end{cases}\qquad c(\vec{r})=c_1(\vec{r})=\begin{cases}c, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_2}\setminus\mathbf{V}_{R_1},\\ 0, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_1};\end{cases}\tag{2.1}$$

系统$\mathrm{I}^{(2)}$：
$$\Sigma(\vec{r})=\Sigma_2(\vec{r})=\begin{cases}\Sigma, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_2}\setminus\mathbf{V}_{R_1},\\ \Sigma, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_1},\end{cases}\qquad c(\vec{r})=c_2(\vec{r})=\begin{cases}c, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R2}\setminus\mathbf{V}_{R_1},\\ 0, & \vec{r}\in\mathbf{V}_{R_1}.\end{cases}\tag{2.2}$$

如果将均匀介质系统的截面，及系统 $\mathrm{I}^{(1)}$ 和 $\mathrm{I}^{(2)}$ 的截面，分别代入（*）式，并分别以 $\mathfrak{A}^{(0)}\psi$，$\mathfrak{A}^{(1)}\psi$，$\mathfrak{A}^{(2)}\psi$ 表这些系统的积-微分表示式，那么，可按(1.1a)式分别定义出系统 $\mathrm{I}^{(0)}$，$\mathrm{I}^{(1)}$ 和 $\mathrm{I}^{(2)}$ 所相应的迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(0)}$，$\boldsymbol{A}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(2)}$。

考虑到分布的球对称性，角密度 $\psi(\vec{r},\vec{\Omega})$ 只是距离 $|\vec{r}|=r$，和向量 $\vec{r}$ 与 $\vec{\Omega}$ 之间夹角余弦 $\mu=\cos\theta=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\Omega}$ 的函数，故对上述每个系统

$$\psi(\vec{r},\vec{\Omega})=(2\pi)^{-1}\psi(r,\mu). \tag{2.3}$$

对系统 $\mathrm{I}^{(1)}$

$$\Sigma(\vec{r})=\Sigma(r)=\Sigma_1(r)=\begin{cases}\Sigma, & R_1\leqslant r\leqslant R_2,\\ 0, & 0\leqslant r<R_2,\end{cases}\qquad c(\vec{r})=c(r)=c_1(r)=\begin{cases}c, & R_1\leqslant r\leqslant R_2,\\ 0, & 0\leqslant r<R_1;\end{cases} \tag{2.1a}$$

对系统 $\mathrm{I}^{(2)}$

$$\Sigma(\vec{r})=\Sigma(r)=\Sigma_2(r)=\begin{cases}\Sigma, & R_1\leqslant r\leqslant R_2,\\ \Sigma, & 0\leqslant r<R_1,\end{cases}\qquad c(\vec{r})=c(r)=c_2(r)=\begin{cases}c, & R_1\leqslant r\leqslant R_2,\\ 0, & 0\leqslant r<R_1.\end{cases} \tag{2.2a}$$

今设

$$\varphi(\vec{r})=\int_{\mathbf{V}_{\vec{\Omega}}}\psi(\vec{r},\vec{\Omega})\,d\vec{\Omega}, \tag{2.4}$$

那么，与迁移算子 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程(1.4)等价的积分方程为

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{V}_{R_2}}c(\vec{r'})\,\varphi(\vec{r'})\,e^{-\int_0^{|\vec{r}-\vec{r'}|}[\lambda+\Sigma(\vec{r}-s'\vec{\Omega})]ds'}\frac{d\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}, \tag{2.5}$$

密度 $\varphi(\vec{r})$ 与角密度 $\psi(\vec{r},\vec{\Omega})$ 之间有关系

$$\psi(\vec{r},\vec{\Omega})=\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(\vec{r},\vec{\Omega})}c(\vec{r}-s\vec{\Omega})\,\varphi(\vec{r}-s\vec{\Omega})\,e^{-\int_0^s[\lambda+\Sigma(\vec{r}-s'\vec{\Omega})]ds'}ds', \tag{2.6}$$

其中，$\vec{r}-\vec{r'}=s\vec{\Omega}$，$d\vec{r'}=s^2\,ds\,d\vec{\Omega}$；$s_0(\vec{r},\vec{\Omega})$ 是边界函数，描述从 $\vec{r}$ 沿 $-\vec{\Omega}$ 方向到 $\mathbf{V}_{R_2}$ 的表面 $\Gamma\mathbf{V}_{R_2}$ 的距离。

在球对称情况下，(2.4)—(2.6)式化为

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^1\psi(r,\mu)\,d\mu=\int_{-1}^1\psi(r,\mu)\,d\mu,\\ &d\vec{\Omega}=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\end{aligned}\right\} \tag{2.4a}$$

$$\begin{aligned}\varphi(r)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 d\mu\int_0^{s_0(r,\mu)}&c(\sqrt{r^2+s^2-2rs\mu})\,\varphi(\sqrt{r^2+s^2-2rs\mu})\\ &\times e^{-\int_0^s[\lambda+\Sigma(\sqrt{r^2+s'^2-2rs'\mu})]ds'}ds;\end{aligned} \tag{2.5a}$$

$$\psi(r,\mu)=\frac{1}{2}\int_0^{s_0(r,\mu)}c(\sqrt{r^2+s^2-2rs\mu})\,\varphi(\sqrt{r^2+s^2-2rs\mu})$$

$$\times e^{-\int_0^s [\lambda+\Sigma(\sqrt{r^2+s'^2-2rs'\mu})]ds'} ds. \tag{2.6 a}$$

如令 $r\varphi(r)=\Phi(r)$，经过烦琐而初等的计算，可将(2·5 a)式最后化为

$$\Phi(r)=\frac{1}{2}\int_0^{R_2} c(r')\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-\int_0^s \left[\lambda+\Sigma\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)\right]ds'} \frac{ds}{s}. \tag{2.5 b}$$

对于系统 $\mathrm{I}^{(0)}$，(2.5 b)具体化为[4]

$$\Phi(r)=\frac{c}{2}\int_0^{R_2}\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}. \tag{2.7}$$

对于系统 $\mathrm{I}^{(2)}$，(2.5 b)具体化为[7]

$$\begin{aligned}\Phi(r)&=\frac{1}{2}\int_0^{R_2}c_2(r')\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}\\ &=\frac{c}{2}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad 0\leqslant r\leqslant R_2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于系统 $\mathrm{I}^{(1)}$，(2.5 b)有形式

$$\begin{aligned}\Phi(r)&=\frac{1}{2}\int_0^{R_2}c_1(r')\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-\int_0^s \left[\lambda+\Sigma_1\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)\right]ds'} \frac{ds}{s}\\ &=\frac{c}{2}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-\int_0^s \left[\lambda+\Sigma_1\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)\right]ds'} \frac{ds}{s},\\ &\qquad 0\leqslant r\leqslant R_2.\end{aligned} \tag{2.9}$$

今取在$[0, R_2]$上绝对值平方可积复值函数的全体所组成的希尔伯特空间 $\mathbf{L}_2[0, R_2]$，它的内积和范数如通常的定义为

$$\langle\Phi,\Psi\rangle=\int_0^{R_2}\Phi(r)\overline{\Psi(r)}dr, \qquad \|\Phi\|^2=\int_0^{R_2}|\Phi(r)|^2dr.$$

视三个系统的积分方程 (2.7)，(2.8)，(2.9) 为空间 $\mathbf{L}_2[0,R_2]$中的算子方程

系统 $\mathrm{I}^{(0)}$： $$\Phi=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_\lambda^{(0)}\Phi, \quad \Phi\in\mathbf{L}_2[0, R_2]; \tag{2.7 a}$$

系统 $\mathrm{I}^{(1)}$： $$\Phi=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_\lambda^{(1)}\Phi, \quad \Phi\in\mathbf{L}_2[0, R_2]; \tag{2.9 a}$$

系统 $\mathrm{I}^{(2)}$： $$\Phi=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}\Phi, \quad \Phi\in\mathbf{L}_2[0, R_2]. \tag{2.8 a}$$

$\boldsymbol{K}_\lambda^{(0)}$，$\boldsymbol{K}_\lambda^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}$ 均为 $\mathbf{L}_2[0,R_2]\longrightarrow\mathbf{L}_2[0,R_2]$的线性积分算子，其核分别为

$$K_\lambda^{(0)}(r,r')=c\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad r,r'\in[0, R_2]; \tag{2.7 b}$$

$$K_\lambda^{(1)}(r,r')=c_1(r')\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-\int_0^s \left[\lambda+\Sigma_1\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)\right]ds'} \frac{ds}{s}, \qquad r,r'\in[0, R_2]; \tag{2.9 b}$$

$$K_\lambda^{(2)}(r,r')=c_2(r')\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad r,r'\in[0,R_2]. \quad (2.8\,b)$$

综合以上所述得下述定理：

定理 1 复数 λ 是系统 $\mathrm{I}^{(0)}$，$\mathrm{I}^{(1)}$，$\mathrm{I}^{(2)}$的迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(0)}$，$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$的本征值的充分必要条件是，2是积分算子 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(0)}$，$\boldsymbol{K}_\lambda^{(1)}$，$\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}$的本征值。

定理 2 对 $j=0,1,2$，及任意复数 λ，诸 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(j)}$是紧算子。

证 $K_\lambda^{(j)}(r,r')$除在 $r=r'$ 处有对数性奇点外，是 r 和 r' 的连续函数［如 $K_\lambda^{(0)}(r,r')$］，或分段连续函数［如 $K_\lambda^{(1)}(r,r')$和 $K_\lambda^{(2)}(r,r')$，$r=R_1$ 是它们的第一类间断点］，在$\mathrm{L}_2\{[0,R_2]\times[0,R_2]\}$中，诸核 $K_\lambda^{(j)}(r,r')$均有有穷范数，所以诸 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(j)}$均为紧算子。

三、诸迁移算子的占优本征值

本节，我们证明系统 $\mathrm{I}^{(1)}$，$\mathrm{I}^{(2)}$的迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$的占优本征值的存在并给出它们之间的相互关系。

考虑空间 $\mathrm{L}_2[0,R_2]$ 中一切非负函数所组成的闭锥 $\mathscr{K}$。$\Phi\in\mathscr{K}$ 的充分必要条件是 $\Phi(r)\geqslant 0$ 在区间$[0,R_2]$中几乎处处成立。我们说空间 $\mathrm{L}_2[0,R_2]$ 中线性算子 $\boldsymbol{T}$ 是 κ-正算子，充分必要的是，若 $\Phi\in\mathscr{K}$，则 $\boldsymbol{T}\Phi\in\mathscr{K}$，即 $\boldsymbol{T}\mathscr{K}\subset\mathscr{K}$，$\boldsymbol{T}$ 保锥不变。如果 $\boldsymbol{T}$ 是 κ-正算子，则以 $\boldsymbol{T}\geqslant\boldsymbol{\Theta}$ 表之，$\boldsymbol{\Theta}$ 表零算子，$\boldsymbol{T}\geqslant\boldsymbol{T}_1$ 意即 $\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_1\geqslant\boldsymbol{\Theta}$。

以 $\mathrm{L}^2[R_1,R_2]$表在区间$[R_1,R_2]$上绝对值平方可积复值函数的全体所组成的希尔伯特空间，其内积和范数如通常所定义，并用下标标记为$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2}$和$\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2}$，以示区别于空间$\mathrm{L}_2[0,R_2]$的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$和范数$\|\cdot\|$。以$\tilde{\mathscr{K}}$表空间 $\mathrm{L}^2[R_1,R_2]$中一切非负函数所组成的闭锥。

今分别以函数

$$\tilde{K}_\lambda^{(1)}(r,r')=c\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-\int_0^s\left[\lambda+\Sigma_1\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)\right]ds'}\frac{ds}{s},$$

$$r,r'\in[R_1,R_2], \qquad (3.1)$$

和

$$\tilde{K}_\lambda^{(2)}(r,r')=c\int_{|r-r'|}^{r+r'} e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad r,r'\in[R_1,R_2], \qquad (3.2)$$

为核定义空间$\mathrm{L}^2[R_1,R_2]$中线性积分算子$\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(1)}$和$\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(2)}$，核 $\tilde{K}_\lambda^{(1)}(r,r')$和$\tilde{K}_\lambda^{(2)}(r,r')$分别为核 $K_\lambda^{(1)}(r,r')$和 $K_\lambda^{(2)}(r,r')$在区域$[R_1,R_2]\times[R_1,R_2]$上的限制。考虑到(2.2a)式，有

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(2)}\tilde{\Phi}=\int_{R_1}^{R_2}c\tilde{\Phi}(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}$$

$$=\int_0^{R_2}c_2(r')\tilde{\Phi}(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad R_1\leqslant r\leqslant R_2, \qquad (3.3)$$

同时，当函数$\tilde{\Phi}$是空间 $\mathrm{L}_2[0,R_2]$中函数 Φ 在区间$[R_1,R_2]$上的限制时，

$$\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}\Phi=\int_0^{R_2}c_2(r')\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad 0\leqslant r\leqslant R_2. \qquad (3.3\,a)$$

今分别以 $\boldsymbol{r}^{(1)}(\lambda)$，$\boldsymbol{r}^{(2)}(\lambda)$和 $\tilde{\boldsymbol{r}}^{(1)}(\lambda)$，$\tilde{\boldsymbol{r}}^{(2)}(\lambda)$表空间$\mathrm{L}_2[0,R_2]$中算子 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(1)}$，$\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}$的谱半径，及

空间 $\mathbf{L}^2[R_1, R_2]$ 中算子 $\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(1)}$，$\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(2)}$的谱半径。

考察诸算子$\boldsymbol{K}_\lambda^{(j)}$和$\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(j)}$的本征值问题

$$\left.\begin{aligned} &\tau^{(j)}(\lambda)\Phi_\lambda^{(j)}=\boldsymbol{K}_\lambda^{(j)}\Phi_\lambda^{(j)}, \qquad \Phi_\lambda^{(j)}\in\mathbf{L}_2[0, R_2], \quad j=1,2; \\ &\tilde{\tau}^{(j)}(\lambda)\,\tilde{\Phi}_\lambda^{(j)}=\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(j)}\tilde{\Phi}_\lambda^{(j)}, \qquad \tilde{\Phi}_\lambda^{(j)}\in\mathbf{L}^2[R_1, R_2], \quad j=1,2。\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

辅理 1 对任意复数 λ，$\tau^{(j)}(\lambda)\neq0$ 是算子 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(j)}$的本征值的充分必要条件是 $\tau^{(j)}(\lambda)$ 是算子$\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(j)}$的本征值。

证 以 $j=2$ 为例证，$j=1$ 的情况证明完全类似。

今设 $\tau^{(2)}(\lambda)\neq0$ 是算子 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}$的本征值，其相应的非零本征函数为 Φ_λ，则有

$$\tau^{(2)}(\lambda)\Phi_\lambda(r)=\int_0^{R_2}c_2(r')\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r-r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}c\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}. \tag{3.5}$$

定义函数

$$\tilde{\Phi}_\lambda(r)=\Phi_\lambda(r), \qquad R_1\leqslant r\leqslant R_2. \tag{3.5 a}$$

由 (3.5) 知 $mes\{r|\quad \Phi_\lambda(r)\neq0, R_1\leqslant r\leqslant R_2\}>0$，故$\tilde{\Phi}_\lambda$是空间$\mathbf{L}^2[R_1, R_2]$中非零元，且从 (3.5) 式可直接看出 $\tau^{(2)}(\lambda)\tilde{\Phi}_\lambda=\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(2)}\tilde{\Phi}_\lambda$，所以 $\tau^{(2)}(\lambda)$是算子 $\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(2)}$的本征值。

反之，设 $\tau^{(2)}(\lambda)\neq0$是算子 $\tilde{\boldsymbol{K}}_\lambda^{(2)}$ 的本征值，其相应的非零本征函数为 $\tilde{\Phi}_\lambda$，那么

$$\tau^{(2)}(\lambda)\tilde{\Phi}_\lambda(r)=\int_{R_1}^{R_2}c\tilde{\Phi}_\lambda(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, \qquad R_1\leqslant r\leqslant R_2. \tag{3.6}$$

定义函数

$$\Phi_\lambda(r)=\begin{cases}\tilde{\Phi}_\lambda(r), & R_1\leqslant r\leqslant R_2, \\ \dfrac{1}{\tau^{(2)}(\lambda)}\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}c\tilde{\Phi}_\lambda(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)s}\frac{ds}{s}, & 0\leqslant r<R_1.\end{cases} \tag{3.7}$$

那么，从(3.6)式可得

$$\tau^{(2)}(\lambda)\Phi_\lambda(r)=\int_0^{R_2}c_2(r')\Phi(r')dr'\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\lambda+\Sigma)}\frac{ds}{s}$$

$$=\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}\Phi_\lambda, \qquad 0\leqslant r\leqslant R_2,$$

并可证明 $\Phi_\lambda\in\mathbf{L}_2[0, R_2]$，因此 $\tau^{(2)}(\lambda)$也是算子 $\boldsymbol{K}_\lambda^{(2)}$的本征值。

辅理 2 对任意实数 β，及 $j=1,2$，$\tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(j)}$是空间 $\mathbf{L}^2[R_1, R_2]$中紧自伴算子。

证 紧性见定理 2。$\tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(2)}$之自伴性由(3.2)式直接得出。考察(3.1)式右边积分的被积函数，如令 $s''=s-s'$，代入之得

$$e^{-\int_0^s\left[\lambda+\Sigma_1\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)\right]ds'}\frac{1}{s}=e^{-\int_0^s\left[\lambda+\Sigma_1\left(\sqrt{r'^2+s''^2-\frac{r'^2-r^2+s^2}{s}s''}\right)\right]ds''}\frac{1}{s},$$

故核 $\tilde{K}_\lambda^{(1)}(r,r')$关于 r,r'是对称的，今设 λ 是实数 β，故算子 $\tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(1)}$的自伴性得证。

辅理 3 对任意实数 β，及 $j=1,2$，

i〉 $\boldsymbol{K}_\beta^{(j)}$是 $\mathbf{L}_2[0, R_2]$中 κ-正算子；

ii〉 $\tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(j)}$是 $\mathbf{L}^2[R_1, R_2]$中 $\tilde{\kappa}$-正且非支柱(Nonsupporting)算子[8]；

iii〉 $\boldsymbol{r}^{(j)}(\beta)=\tilde{\boldsymbol{r}}^{(j)}(\beta)>0$。

证 i〉 $K_\beta^{(j)}$之κ-正性是显然的，因为从(2.9 b)和(2.8 b)知它们的核均为$[0,R_2]\times[0,R_2]$上的非负函数。

ii〉 据(3.1)和(3.2)式，算子$\tilde{K}_\beta^{(j)}$之核是$[R_1,R_2]\times[R_1,R_2]$上的正实函数，故$\tilde{K}_\beta^{(j)}$不仅是$\tilde{\kappa}$-正的算子，而且也是非支柱的算子，因为对任意$0\neq\Phi\in\tilde{\mathscr{X}}$，$\tilde{K}_\beta^{(j)}\Phi>0$在$[R_1,R_2]$上几乎处处成立。

iii〉 由辅理2知$\tilde{K}_\beta^{(j)}$是紧自伴算子，由本辅理之ii〉知$\tilde{K}_\beta^{(j)}$是非支柱算子，故$\tilde{r}^{(j)}(\beta)=|\tilde{K}_\beta^{(j)}|_{L^2}>0$，结合辅理1得$r^{(j)}(\beta)=\tilde{r}^{(j)}(\beta)>0$。

辅理 4 对任意实数β，$r^{(1)}(\beta)>r^{(2)}(\beta)$。

证 由(3.1)和(3.2)式知，使

$$\tilde{K}_\beta^{(1)}(r,r')-\tilde{K}_\beta^{(2)}(r,r')=c\int_{|r-r'|}^{r+r'}e^{-(\beta+\Sigma)s}\left\{e^{-\int_0^s\left[\Sigma_1\left(\sqrt{r^2+s'^2-\frac{r^2-r'^2+s^2}{s}s'}\right)-\Sigma\right]ds'}-1\right\}\frac{ds}{s}>0$$

的(r,r')点集之测度大于零，而$\tilde{K}_\beta^{(1)}$，$\tilde{K}_\beta^{(2)}$又都是非支柱的紧自伴算子，所以由[8]中之定理4.3，知$\tilde{r}^{(1)}(\beta)>\tilde{r}^{(2)}(\beta)$，考虑到辅理3，即得$r^{(1)}(\beta)>r^{(2)}(\beta)$。

辅理 5 对$j=1,2$，设$\tau_0^{(j)}(\beta)$，$\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)$分别为算子$K_\beta^{(j)}$，$\tilde{K}_\beta^{(j)}$的按绝对值为最大的本征值，则

i〉 $\tau_0^{(j)}(\beta)$，$\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)$均为$\beta$的连续且严格递减的函数；

ii〉 $\lim\limits_{\beta\to\infty}\tau_0^{(j)}(\beta)=\lim\limits_{\beta\to\infty}\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)=0$；

iii〉 $\lim\limits_{\beta\to-\infty}\tau_0^{(j)}(\beta)=\lim\limits_{\beta\to-\infty}\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)=\infty$。

证 i〉 由辅理1、辅理2和辅理3知

$$\tau_0^{(j)}(\beta)=r^{(j)}(\beta)=\tilde{r}^{(j)}(\beta)=\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)=|\tilde{K}_\beta^{(j)}|_{L^2}=\left\{\int_{R_1}^{R_2}dr\int_{R_1}^{R_2}dr'|\tilde{K}_\beta^{(j)}(r,r')|^2\right\}^{\frac{1}{2}},\quad(3.8)$$

但$\tilde{K}_\beta^{(j)}(r,r')$是$\beta$的连续函数，故$\tau_0^{(j)}(\beta)$，$\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)$亦为$\beta$之连续函数。今设$\beta_1>\beta_2$，则

$$\tilde{K}_{\beta_2}^{(j)}(r,r')-\tilde{K}_{\beta_1}^{(j)}(r,r')>0,$$

从(3.8)式直接得知$\tau_0^{(j)}(\beta)$，$\tilde{\tau}_0^{(j)}(\beta)$关于$\beta$的严格递减性。

ii〉 由(3.8)式直接得出。

iii〉 考察$\beta<-\Sigma$，即$-(\beta+\Sigma)>0$时的情况。取$\Phi_0\equiv1$，不难得出

$$\tilde{K}_\beta^{(2)}\Phi_0\geqslant\frac{(R_2-R_1)c}{2R_2}\frac{1}{-(\beta+\Sigma)}\left[e^{-2(\beta+\Sigma)R_1}-1\right]\Phi_0,$$

$$|\tilde{K}_\beta^{(2)}|_{L^2}|\Phi_0|_{L^2}\geqslant\frac{(R_2-R_1)c}{2R_2}\frac{1}{-(\beta+\Sigma)}\left[e^{-2(\beta+\Sigma)R_1}-1\right]|\Phi_0|_{L^2}.$$

据(3.8)式，即

$$\tau_0^{(2)}(\beta)=\tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta)=|\tilde{K}_\beta^{(2)}|_{L^2}\geqslant\frac{(R_2-R_1)c}{2R_2}\frac{1}{-(\beta+\Sigma)}\left[e^{-2(\beta+\Sigma)R_1}-1\right],$$

所以

$$\lim_{\beta\to-\infty}\tau_0^{(2)}(\beta)=\lim_{\beta\to-\infty}\tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta)=\infty.$$

考虑到辅理4及(3.8)式，$\tilde{\tau}_0^{(1)}(\beta)=\tau_0^{(1)}(\beta)>\tau_0^{(2)}(\beta)=\tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta)\xrightarrow{\beta\to-\infty}\infty$。

定理 3 对$j=0,1,2$，

i〉 迁移算子$A^{(j)}$的复本征值对称于实轴；

ii〉 迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 的共轭算子 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的谱与 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 的谱相同。

证 i〉 由迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 的定义，知 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 是变 $D(\boldsymbol{A}^{(j)})$ 中实函数为实函数的算子，按[9]中之定理9.13，知我们的结论成立。

ii〉 据[2]，迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的谱中均只有本征值。算子 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的本征方程所对应的等价积分方程相同，因此本文对 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 的本征方程所对应的等价积分方程的论述对 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的本征方程所对应的等价积分方程亦真。且 $\boldsymbol{A}^{(j)}$，$\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 都是变实函数为实函数的算子，本征值均对称于实轴。另一方面，若 λ 是 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 的本征值，则 $\bar{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的本征值；若 μ 是 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的本征值，则 $\bar{\mu}$ 是 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 的本征值。故 $\boldsymbol{A}^{(j)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(j)*}$ 的谱相同。

辅理6 设 $\omega=\beta+i\alpha$ 是迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 的本征值，β,α 是实数，$\alpha>0$。设 $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$ 是空间 $\mathbf{L}^2[R_1,R_2]$ 中算子 $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\omega}$ 相应于本征值2的非零本征函数，其支集为正测集 $e\subset[R_1,R_2]$。如令 $\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')\equiv\tilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r')$，则

i〉 对 $r\in[R_1,R_2]$，$r'\in e$，有 $\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')=G_1(\beta,\alpha;r,r')+iG_2(\beta,\alpha;r,r')$，$G_1$ 和 G_2 是两个非零实函数；

ii〉 对属于 e 的几乎所有(即除一零测集外)的 r，G_1 和 G_2 作为 $r'\in[R_1,R_2]$ 的函数是线性无关的。

证 (1) 如果 $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$ 是实函数。

i〉 $\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$ 不是实函数。因为 $\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')\equiv\tilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r')=\mathscr{R}e\tilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r')+i\mathscr{I}m\tilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r')$，倘若 $\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$ 是实函数，则 $\mathscr{I}m\tilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r')=0$，因而有 $\int_{|r-r'|}^{r+r'}\sin\alpha s e^{-(\beta+\Sigma)s}\frac{ds}{s}=0$ 对 $r\in[R_1,R_2]$，$r'\in e$ 成立。取 $r=r'$，并作变数变换 $\alpha s=s'$，则 $\int_0^{2\alpha r'}\sin s' e^{-\frac{1}{\alpha}(\beta+\Sigma)s'}\frac{ds'}{s'}=0$ 对 $r'\in e$ 成立，由于 e 是正测集，这是不可能的，因为最多只有有限多个 $r'\in e$ 使积分 $\int_0^{2\alpha r'}\sin s' e^{-\frac{1}{\alpha}(\beta+\Sigma)s'}\frac{ds'}{s'}$ 为零。

$\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$ 也不是纯虚的函数，否则，若 $\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')=iG_{\omega}(r,r')$，$G_{\omega}$ 是非零实函数，则从 $2\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r)=i\int_{R_2}^{R_1}G_{\omega}(r,r')dr'$，得左边是实函数，而右边是纯虚的函数，这只有当 $r\in[R_1,R_2]$ 时 $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r)=0$ 才成立，但这与 $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$ 是非零本征函数相矛盾。

ii〉 今证不存在任何集合 $\bar{e}\subset e$，$mes\,\bar{e}>0$，使 $r\in\bar{e}$ 时，G_1 和 G_2 作为 $r'\in e$ 的函数是线性相关的。否则，设存在这样的集合 $\bar{e}$，使 $r\in\bar{e}$ 时，存在不同时为零的两个实函数 $a_1(r)$ 和 $a_2(r)$ 使

$$a_1(r)G_1(\beta,\alpha;r,r')=a_2(r)G_2(\beta,\alpha;r,r') \tag{3.9}$$

对 $r'\in e$ 成立。今以 θ_1 和 θ_2 分别表函数 $a_1(r)$ 和 $a_2(r)$ 在 $\bar{e}$ 中的零点之集合，$\theta_1\cap\theta_2=0$。

(1) 如果 $mes\,\theta_1>0$，$mes\,\theta_2>0$，或 $mes\,\theta_1>0$，$mes\,\theta_2=0$。则均可由(3.9)式知对 $r\in\theta_1$，$r'\in e$ 有 $G_2(\beta,\alpha;r,r')=0$，从而知对 $r\in\theta_1$，$r'\in e$ 而言，$\tilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$ 和 $\tilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')$ 都是实函数，取 $r'=r$，得 $\int_0^{2\alpha r}\sin s' e^{-\frac{1}{\alpha}(\beta+\Sigma)s'}\frac{ds'}{s'}=0$ 对 $r\in\theta_1$ 成立，如前所述这不可能。

(2) 如果 $mes\,\theta_1=0$，$mes\,\theta_2>0$。则由(3.9)式知对 $r\in\theta_2$ 及 $r'\in e$，$G_1(\beta,\alpha;r,r')=0$，

因而$\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$是纯虚的函数。所以，对$r\in\theta_2$，$2\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r)=\int_{R_1}^{R_2}\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')dr'=\int_e\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')dr'$的左边是非零实函数，而右边或是零，或是非实函数，都矛盾。

(3) 如果$mes\ \theta_1=0$，$mes\theta_2=0$。则$mes\ \{\theta_1\cup\theta_2\}=0$，$\bar{e}\setminus\{\theta_1\cup\theta_2\}=e'$，$mes\ e'>0$，且$a(r)=\dfrac{a_2(r)}{a_1(r)}$对一切$r\in e'$不为零，所以，由(3.9)式知

$$G_1(\beta,\alpha;r,r')=a(r)G_2(\beta,\alpha;r,r')$$

对$r\in e'$及$r'\in e$成立，因而对$r\in e'$，有

$$2\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r)=\int_{R_1}^{R_2}\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')dr'=[a(r)+i]\int_e G_2(\beta,\ \alpha;r,r')dr',\ \widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r)\not\equiv 0,$$

这不可能，因为左边$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$是非零实函数，而右边或为零，或为复函数，均矛盾。

总结上述讨论，我们证明了对几乎所有的$r\in e$，G_1和G_2作为$r'\in e$的函数是线性无关的，故作为$r'\in[R_1,R_2]$的函数亦线性无关。

(2) 如果$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$是纯虚的函数。设$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}=if_{\omega}$，$f_{\omega}$是非零实函数，则由于$2f_{\omega}(r)=\int_{R_1}^{R_2}\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')f_{\omega}(r')dr'$，知$f_{\omega}$是算子$\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}$相应于本征值2的非零本征函数，重复**(1)**之讨论，知本辅理正确。

(3) 如果$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}=f_{\omega,1}+if_{\omega,2}$，$f_{\omega,1}$和$f_{\omega,2}$是两个非零实函数。

i) $\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$不是实函数，否则由$2[f_{\omega,1}(r)+if_{\omega,2}(r)]=\int_{R_1}^{R_2}\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')\ dr'$，得$f_{\omega,2}=0$之矛盾；$\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$也不是纯虚的函数，否则，又必得$f_{\omega,1}=0$之矛盾。

ii) 今证不存在任何集合$\bar{e}\subset e$，$mes\ \bar{e}>0$，使$r\in\bar{e}$时，G_1和G_2作为$r'\in e$的函数是线性相关的。如果不是这样，设存在这样的集合$\bar{e}$，当$r\in\bar{e}$时，有不同时为零的两个实函数$a_1(r)$和$a_2(r)$，使

$$a_1(r)G_1(\beta,\alpha;r,r')=a_2(r)G_2(\beta,\alpha;r,r') \tag{3.9a}$$

对$r'\in e$成立。以θ_1和θ_2分别表$a_1(r)$和$a_2(r)$在$\bar{e}$中之零点的集合，$\theta_1\cap\theta_2=0$。

(1) 如果$mes\ \theta_1>0$，$mes\ \theta_2>0$，或$mes\ \theta_1>0$，$mes\ \theta_2=0$。由(3.9a)式，知均可得$G_2(\beta,\alpha;r,r')=0$对$r\in\theta_1$及$r'\in e$成立，故对$r\in\theta_1$和$r'\in e$而言，$\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')$是实函数，所以，由$2[f_{\omega,1}(r)+if_{\omega,2}(r)]=\int_{R_1}^{R_2}\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')dr'=\int_e\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')dr'$知对$r\in\theta_1$有$f_{\omega,2}(r)=0$。但$\theta_1\subset e$，故$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r)\equiv f_{\omega,1}(r)\not\equiv 0$对$r\in\theta_1$，即对$r\in\theta_1$而言，$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$是实函数，所以，对$r\in\theta_1$和$r'\in e$而言，$\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')$是实函数，如前面的论述一样，知$\int_0^{2\alpha r}\sin s'\ e^{-\frac{1}{\alpha}(\beta+\Sigma)s'}\dfrac{ds'}{s'}=0$对$r\in\theta_1$成立，这是不可能的。

(2) 如果$mes\ \theta_1=0$，$mes\ \theta_2>0$。则由(3.9a)式知对$r\in\theta_2$，$r'\in e$有$G_1(\beta,\alpha;r,r')=0$及$\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(\beta,\alpha;r,r')$是纯虚的函数，故必$f_{\omega,1}(r)=0$对$r\in\theta_2$成立，所以对$r\in\theta_2$而言，$\widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}$是纯虚的函数，所以，由$\widetilde{G}^{(2)}_{\omega}(r,r')\equiv\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')\ \widetilde{\Phi}^{(2)}_{\omega}(r')=i\mathscr{R}e\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,\ r')\ f_{\omega,2}(r')-\mathscr{I}m\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')f_{\omega,2}(r')$对$r\in\theta_2$，$r'\in\theta_2$成立，知必有$\mathscr{I}m\widetilde{K}^{(2)}_{\omega}(r,r')=0$对$r\in\theta_2$和$r'\in\theta_2$成立，仿(1)之证法知这是不可能的。

(3) 如果$mes\ \theta_1=0$，$mes\ \theta_2=0$。那么$mes\{\theta_1\cup\theta_2\}=0$，$\bar{e}\setminus\{\theta_1\cup\theta_2\}=e'$，$mes\ e'>0$，且$a(r)=\dfrac{a_2(r)}{a_1(r)}$对一切$r\in e'$不为零，所以，由(3.9a)式知

$$G_1(\beta,\alpha;r,r')=a(r)G_2(\beta,\alpha;r,r') \tag{3.10}$$

对 $r\in e', r'\in e$ 成立。而

$$\tilde{G}_\omega^{(2)}(r,r')\equiv\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')\,\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}(r')=[\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')+i\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')][f_{\omega,1}(r')+$$
$$+if_{\omega,2}(r')]=[f_{\omega,1}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')-f_{\omega,2}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')]+$$
$$+i[f_{\omega,2}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')+f_{\omega,1}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')],$$

所以，由（3.10）式知

$$f_{\omega,1}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')-f_{\omega,2}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=a(r)[f_{\omega,2}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')+$$
$$+f_{\omega,1}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')] \tag{3.11}$$

对 $r\in e'$ 及 $r'\in e$ 成立。

另一方面，由于(3.10)式，知

$$f_{\omega,1}(r)=a(r)f_{\omega,2}(r) \qquad r\in e', \tag{3.12}$$

$$f_{\omega,2}(r)=\frac{1}{a(r)}f_{\omega,1}(r) \qquad r\in e'. \tag{3.12 a}$$

将（3.12）代入（3.11）得关于 $f_{\omega,2}$ 的方程

$$a(r')f_{\omega,2}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')-f_{\omega,2}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=a(r)f_{\omega,2}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')+$$
$$+a(r)a(r')f_{\omega,2}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r') \tag{3.13}$$

对 $r\in e'$ 及 $r'\in e$ 成立。(3.12 a)代入（3.11）得 $f_{\omega,1}$ 的方程

$$a(r')f_{\omega,1}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')-f_{\omega,1}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=$$
$$=a(r)f_{\omega,1}(r')\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')+a(r)a(r')f_{\omega,1}(r')\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r') \tag{3.13 a}$$

对 $r\in e'$ 及 $r'\in e$ 成立。

今设 $f_{\omega,1}$ 和 $f_{\omega,2}$ 的支集分别为集合 E_1 和 E_2，$E_1\subset e$，$E_2\subset e$，并有 $\{E_1\cup E_2\}=e$，所以据（3.13）和(3.13 a)知

$$[a(r')-a(r)]\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=[a(r)a(r')+1]\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r') \tag{3.14}$$

对 $r\in e'$ 及 $r'\in e'$ 成立。由于 $\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')$ 对 $r,r'\in e'$ 之对称性，得

$$[a(r)-a(r')]\mathscr{R}e\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=[a(r)a(r')+1]\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r') \tag{3.14 a}$$

对 $r\in e'$ 及 $r'\in e'$ 成立。等式（3.14）和（3.14 a)两边相加，并取 $r'=r$，知有

$$\{[a(r)]^2+1\}\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=0 \qquad r\in e',$$

但 $a(r)$ 是实函数，$[a(r)]^2+1\neq0$，故必 $\mathscr{I}m\tilde{K}_\omega^{(2)}(r,r')=0$ 对一切 $r\in e'$ 成立，如前面所证这是不可能的。辅理到此全部证完。

由类似的证明可知，本辅理之结论，对迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(0)}$，$\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的本征值问题所对应之积分算子 $\boldsymbol{K}_\omega^{(0)}$，$\tilde{\boldsymbol{K}}_\omega^{(1)}$ 之核亦真。

定理 4 在空间 H，迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 存在占优本征值 $\beta_0^{(2)}$。

证 由辅理 3 和辅理 5 知 $\tau_0^{(2)}(\beta)=\boldsymbol{r}^{(2)}(\beta)>0$ 是 β 的连续且严格递减函数，它与 β-τ 平面的直线 $\tau(\beta)=2$ 相交一次且仅只相交一次，记此交点的 β 轴坐标为 $\beta_0^{(2)}$，据定理 1 知 $\beta_0^{(2)}$ 是 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 之本征值。

首先证明 $\beta_0^{(2)}$是严格大于 $\boldsymbol{A}^{(2)}$的其他任何本征值的实部的一个本征值。

(1) 对算子 $\boldsymbol{A}^{(2)}$的任何实本征值 $\beta_n^{(2)} \neq \beta_0^{(2)}$，有 $\beta_n^{(2)} < \beta_0^{(2)}$。不然，必 $\beta_n^{(2)} > \beta_0^{(2)}$，但$\tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(2)}$是 $\mathbf{L}^2[R_1, R_2]$ 中非支柱的紧自伴算子，据 (3.2) 式，知核 $\tilde{K}_\beta^{(2)}(r, r')$ 是 β 的连续且严格递减函数，因而有 $0 < \tilde{K}^{(2)}_{\beta_n^{(2)}}(r, r') < \tilde{K}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}(r, r')$，据 (3.8) 得 $\tau_0^{(2)}(\beta_n^{(2)}) = \boldsymbol{r}^{(2)}(\beta_n^{(2)})$ $= \tilde{\boldsymbol{r}}^{(2)}(\beta_n^{(2)}) = \tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta_n^{(2)}) = |\tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_n^{(2)}}|_{\mathbf{L}^2} = \left\{\int_{R_1}^{R_2} dr \int_{R_1}^{R_2} dr' \, |\tilde{K}^{(2)}_{\beta_n^{(2)}}(r, r')|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \left\{\int_{R_1}^{R_2} dr \int_{R_1}^{R_2} dr'\right.$ $\left.\times |\tilde{K}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}(r, r')|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta_0^{(2)}) = \tau_0^{(2)}(\beta_0^{(2)}) = 2$，这说明 $\beta_n^{(2)}$ 不可能是迁移算子 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 的本征值，与假设相矛盾。

(2) 对算子 $\boldsymbol{A}^{(2)}$的任何非实本征值 $\omega = \beta + i\alpha$，$\alpha \neq 0$，必有 $\beta < \beta_0^{(2)}$。用反证法，设结论不真，则必有 $\beta_0^{(2)} \leqslant \beta$。据定理 3 只须证明 $\alpha > 0$ 的情况就够了。由定理 1 和辅理 1，知存在 $0 \neq \tilde{\Phi}_\omega^{(2)} \in \mathbf{L}^2[R_1, R_2]$，使

$$2\tilde{\Phi}_\omega^{(2)} = \tilde{\boldsymbol{K}}_\omega^{(2)} \tilde{\Phi}_\omega^{(2)}, \tag{3.15}$$

但据辅理 6，对 $r \in [R_1, R_2]$，$r' \in e$ 有 $\tilde{G}_\omega^{(2)}(r, r') \equiv \tilde{K}_\omega^{(2)}(r, r') \tilde{\Phi}_\omega^{(2)}(r') = G_1(\beta, \alpha; r, r')$ $+ iG_2(\beta, \alpha; r, r')$，$G_1$ 和 G_2 是两个非零实函数，且对 e 中几乎所有的 r，G_1 和 G_2 作为 $r' \in [R_1, R_2]$的函数是线性无关的。今利用[10]中之 201 条，对 $r \in [R_1, R_2]$有

$$2|\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}| = \left|\int_{R_1}^{R_2} \tilde{K}_\omega^{(2)}(r, r') \tilde{\Phi}_\omega^{(2)}(r') dr'\right| = \left|\int_{R_1}^{R_2} \tilde{G}_\omega^{(2)}(r, r') dr'\right| \leqslant$$

$$\begin{cases} \leqslant \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \tilde{K}_\beta^{(2)}(r, r') |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}(r')| dr' & r \notin e, \\ = \left|\displaystyle\int_{R_1}^{R_2} G_1(\beta, \alpha; r, r') dr' + i\int_{R_1}^{R_2} G_2(\beta, \alpha; r, r') dr'\right| = \end{cases} \tag{3.16}$$

$$= \left\{\left[\int_{R_1}^{R_2} G_1(\beta, \alpha; r, r') dr'\right]^2 + \left[\int_{R_1}^{R_2} G_2(\beta, \alpha; r, r') dr'\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \int_{R_1}^{R_2} \left\{[G_1(\beta, \alpha; r, r')]^2 + [G_2(\beta, \alpha; r, r')]^2\right\}^{\frac{1}{2}} dr' = \int_{R_1}^{R_2} |\tilde{G}_\omega^{(2)}(r, r')| dr' \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R_1}^{R_2} \tilde{K}_\beta^{(2)}(r, r') |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}(r')| dr' \qquad r \in e. \tag{3.16a}$$

另一方面，对任意 $\tilde{\Phi} \in \mathbf{L}^2[R_1, R_2]$，有 $\tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(2)} |\tilde{\Phi}| \leqslant \tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_{(0)}^{(2)}} |\tilde{\Phi}|$。并且，由于 $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$是非支柱的紧自伴算子，据[8]之定理 2.3，算子 $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$相应于本征值 $\tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta_0^{(2)}) = \tilde{\boldsymbol{r}}(\beta_0^{(2)}) = 2$ 的本征函数 $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$在$[R_1, R_2]$上几乎处处为正，所以有 $\langle |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}|, \tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \rangle_{\mathbf{L}^2} > 0$，故由(3.16) 和 (3.16a) 知 $2\langle |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}|, \tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \rangle_{\mathbf{L}^2} < \langle \tilde{\boldsymbol{K}}_\beta^{(2)} |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}|, \tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \rangle_{\mathbf{L}^2} \leqslant \langle \tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}|,$ $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \rangle_{\mathbf{L}^2} = \langle |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}|, \tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \rangle_{\mathbf{L}^2} = 2\langle |\tilde{\Phi}_\omega^{(2)}|, \tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}} \rangle_{\mathbf{L}^2}$，矛盾。

现在我们来证明 $\beta_0^{(2)}$ 是算子 $\boldsymbol{A}^{(2)}$的一个简单的本征值。因$\tilde{\boldsymbol{K}}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$是 $\mathbf{L}^2[R_1, R_2]$ 中非支柱的紧自伴算子，故相应于本征值$\tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta_0^{(2)}) = \tilde{\boldsymbol{r}}^{(2)}(\beta_0^{(2)}) = 2$ 有唯一的（除一常数因子外）本

征函数$\tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}>0$在区间$[R_1, R_2]$上几乎处处成立。如果说$\boldsymbol{K}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$相应于本征值$\tau_0^{(2)}(\beta_0^{(2)})=\tilde{\tau}_0^{(2)}(\beta_0^{(2)})$有两个异于零的非零本征函数$\Phi^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$和$\mathring{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$,那么,据辅理1,必有$\mathring{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}=a\Phi^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}=a\tilde{\Phi}^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$在区间$[R_1, R_2]$上，考虑到（2.2 a）式和(2.6 a)式，知迁移算子$\boldsymbol{A}^{(2)}$相应于本征值$\beta_0^{(2)}$有唯一的（除一常数因子外）本征函数$\psi^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}(r,\mu)>0$在区域$[0,R_2]\times[-1,1]$上几乎处处成立。

如果说$\beta_0^{(2)}$不是算子$\boldsymbol{A}^{(2)}$的一个简单的本征值，则$\boldsymbol{A}^{(2)}$的豫解算子$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$在$\lambda=\beta_0^{(2)}$处有一个阶数为$k>1$的极点，所以有$\psi\neq0$，使

$$(\beta_0^{(2)}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{k-1}\psi\neq0, \qquad 而(\beta_0^{(2)}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{k}\psi=0。$$

故可设$(\beta_0^{(2)}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{k-1}\psi=a\psi^{(2)}_{\beta_0^{(2)}}$，$a\neq0$。

据定理3之ii〉的论述，迁移算子$\boldsymbol{A}^{(2)}$与其共轭算子$\boldsymbol{A}^{(2)*}$的谱相同，因此可取算子$\boldsymbol{A}^{(2)*}$相应于本征值$\beta_0^{(2)}$的本征函数$\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}>0$几乎处处于区域$[0,R_2]\times[-1,1]$上，故$(\psi^{(2)}_{\beta_0^{(2)}},\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}})>0$，但

$$a(\psi^{(2)}_{\beta_0^{(2)}},\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}})=\left((\beta_0^{(2)}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{k-1}\psi,\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=$$

$$=\left((\beta_0^{(2)}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{k-2}\psi,\ (\beta_0^{(2)}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)*})\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=0,$$

所以必有$a=0$，矛盾。简单性证完。

最后，我们来证明算子$\boldsymbol{A}^{(2)}$没有任何异于$\beta_0^{(2)}$的本征值有非负本征函数。如若不然，假设有$\psi'\geqslant0$几乎处处于$[0,R_2]\times[-1,1]$上，是算子$\boldsymbol{A}^{(2)}$相应于本征值$\lambda'\neq\beta_0^{(2)}$的本征函数，则有

$$\lambda'\left(\psi',\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=\left(\boldsymbol{A}^{(2)}\psi',\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=\left(\psi',\ \boldsymbol{A}^{(2)*}\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=\beta_0^{(2)}\left(\psi',\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right),$$

因此必有$\left(\psi',\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=0$,但$\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}(r,\mu)$是几乎处处为正的函数，所以，不仅存在一正测集，使在其上$\psi'(r,\mu)>0$，而且也一定存在一正测集，使在其上有$\psi'(r,\mu)<0$，因此ψ'

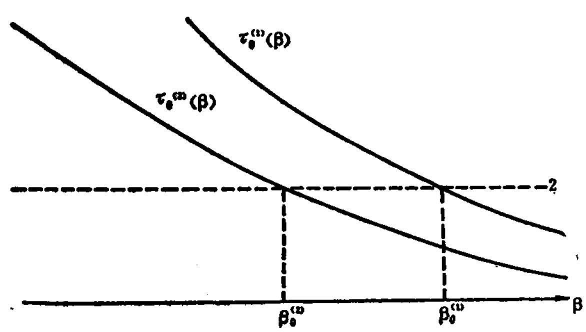

图 1　迁移算子$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$的占优本征值$\beta_0^{(1)}$,$\beta_0^{(2)}$之间的关系

不可能是非负函数，矛盾。到此，定理4全部证完。

定理5 在空间H，迁移算子$\boldsymbol{A}^{(1)}$存在占优本征值$\beta_0^{(1)}$。

此定理之证明类似于定理4。

定理6 $\beta_0^{(2)}<\beta_0^{(1)}$。

证 据辅理3和辅理4，$\tilde{r}_0^{(1)}(\beta_0^{(2)})=\tilde{r}^{(1)}(\beta_0^{(2)})>\tilde{r}^{(2)}(\beta_0^{(2)})=2$，故由辅理5知$\beta_0^{(1)}>\beta_0^{(2)}$，见图1。

四、诸占优本征值的关系和估算

上节，我们已经证明了迁移算子$\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)}$分别存在占优本征值$\beta_0^{(1)},\beta_0^{(2)}$，并比较了它们的大小。至于迁移算子$\boldsymbol{A}^{(0)}$的实本征值的存在可参考[4]，而存在占优本征值$\beta_0^{(0)}$的证明与定理4类似。本节，我们对$\beta_0^{(0)},\beta_0^{(1)},\beta_0^{(2)}$之间的关系作进一步的讨论。

令$m=\max\{\beta_0^{(0)},\beta_0^{(1)},\beta_0^{(2)}\}+1$，那么，$m$是迁移算子$\boldsymbol{A}^{(0)},\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)}$共同的豫解点，故有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{m-\beta_0^{(0)}}\psi_{\beta_0^{(0)}}^{(0)}&=(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(0)})^{-1}\psi_{\beta_0^{(0)}}^{(0)};\\
\frac{1}{m-\beta_0^{(1)}}\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)}&=(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)})^{-1}\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)};\\
\frac{1}{m-\beta_0^{(2)}}\psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)}&=(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{-1}\psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)}.
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

如设$\psi_{\beta_0^{(0)}}^{(0)*}$，$\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)*}$，$\psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}$分别为算子$\boldsymbol{A}^{(0)}$，$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$的共轭算子$\boldsymbol{A}^{(0)*}$，$\boldsymbol{A}^{(1)*}$，$\boldsymbol{A}^{(2)*}$相应于占优本征值$\beta_0^{(0)},\beta_0^{(1)},\beta_0^{(2)}$的本征函数，又有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{m-\beta_0^{(0)}}\psi_{\beta_0^{(0)}}^{(0)*}&=(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(0)*})^{-1}\psi_{\beta_0^{(0)}}^{(0)*};\\
\frac{1}{m-\beta_0^{(1)}}\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)*}&=(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)*})^{-1}\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)*};\\
\frac{1}{m-\beta_0^{(2)}}\psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}&=(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)*})^{-1}\psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}.
\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

从(4.1)和(4.2)得

$$\left([(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)})^{-1}-(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{-1}]\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)},\ \psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}\right)=\frac{\beta_0^{(1)}-\beta_0^{(2)}}{(m-\beta_0^{(1)})(m-\beta_0^{(2)})}\left(\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)},\ \psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}\right).\tag{4.3}$$

另一方面，据(2.1)和(2.2)可得

$$\begin{aligned}
&\left([(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)})^{-1}-(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{-1}]\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)},\ \psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}\right)\\
=&\left((m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})^{-1}[(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)})-(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)})](m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)})^{-1}\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)},\ \psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}\right)\\
=&\left((\boldsymbol{A}^{(1)}-\boldsymbol{A}^{(2)})(m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)})^{-1}\psi_{\beta_0^{(1)}}^{(1)},\ (m\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(2)*})^{-1}\psi_{\beta_0^{(2)}}^{(2)*}\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(m-\beta_0^{(1)})(m-\beta_0^{(2)})}\left((\boldsymbol{A}^{(1)}-\boldsymbol{A}^{(2)})\ \psi^{(1)}_{\beta_0^{(1)}},\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)$$

$$=\frac{1}{(m-\beta_0^{(1)})(m-\beta_0^{(2)})}\left((\Sigma-\Sigma_1(\vec{r}))\psi^{(1)}_{\beta_0^{(1)}},\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right). \tag{4.4}$$

从而由(4.3)和(4.4)得出

$$\frac{\beta_0^{(1)}-\beta_0^{(2)}}{(m-\beta_0^{(1)})\ (m-\beta_0^{(2)})}\left(\psi^{(1)}_{\beta_0^{(1)}},\ \ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)=\frac{1}{(m-\beta_0^{(1)})\ (m-\beta_0^{(2)})}\left((\Sigma-\Sigma_1(\vec{r})\ \psi^{(1)}_{\beta_0^{(1)}},\ \ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right),$$

即

$$\beta_0^{(1)}-\beta_0^{(2)}=\frac{\left((\Sigma-\Sigma_1(\vec{r})\ \psi^{(1)}_{\beta_0^{(1)}},\ \ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)}{\left(\psi^{(1)}_{\beta_0^{(1)}},\ \ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)}. \tag{4.5}$$

同理可得

$$\beta_0^{(0)}-\beta_0^{(2)}=\frac{\left((c-c_2(\vec{r}))\int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi^{(0)}_{\beta_0^{(0)}}(\vec{r},\vec{\Omega}')\ d\vec{\Omega}',\ \int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}(\vec{r},\vec{\Omega}')\ d\vec{\Omega}'\right)}{\left(\psi^{(0)}_{\beta_0^{(0)}},\ \psi^{(2)*}_{\beta_0^{(2)}}\right)}. \tag{4.6}$$

$$\beta_0^{(0)}-\beta_0^{(1)}=-\frac{\left((\Sigma-\Sigma_1(\vec{r}))\psi^{(0)}_{\beta_0^{(0)}},\ \psi^{(1)*}_{\beta_0^{(1)}}\right)}{\left(\psi^{(0)}_{\beta_0^{(0)}},\ \ \psi^{(1)*}_{\beta_0^{(1)}}\right)}+$$

$$+\frac{\left((c-c_1(\vec{r}))\int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi^{(0)}_{\beta_0^{(0)}}(\vec{r},\vec{\Omega}')\ d\vec{\Omega}',\ \int_{V_{\vec{\Omega}}}\psi^{(1)*}_{\beta_0^{(1)}}(\vec{r},\vec{\Omega}')\ d\vec{\Omega}'\right)}{\left(\psi^{(0)}_{\beta_0^{(0)}},\ \ \psi^{(1)*}_{\beta_0^{(1)}}\right)}. \tag{4.7}$$

定理 7 $\beta_0^{(2)}<\beta_0^{(1)}<\beta_0^{(0)}+\Sigma$。

证 由于诸本征函数 $\psi^{(j)}_{\beta_0^{(j)}}$，$\psi^{(j)*}_{\beta_0^{(j)}}$，$j=0,1,2$；都是相空间 $\mathbf{G}=\mathbf{V}_{R_2}\times\mathbf{V}_{\vec{\Omega}}$ 中几乎处处为正的函数，且据(2.1)和(2.2)式，知 $\Sigma-\Sigma_j(\vec{r})\geqslant 0$，$c-c_j(\vec{r})\geqslant 0$，其中 $j=1,2$，所以，由(4.5)，(4.6)，(4.7)三式可直接得出本定理之结论。

最后，我们指出，如令

$$l=\frac{1}{2R_2}e^{-2R_2(\beta_0^{(0)}+2\Sigma)},$$

$$p=\max_{\vec{r},\vec{r}'''\in\mathbf{V}_{R_2}}\int_{\mathbf{V}_{R_2}}\frac{d\vec{r}''}{|\vec{r}''-\vec{r}'''|^2}\int_{\mathbf{V}_{R_2}}\frac{1}{|\vec{r}'-\vec{r}''|^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}d\vec{r}',$$

在假定 $\beta_0^{(2)}+\Sigma\geqslant 0$ 的条件下，可经过繁琐、但是初等的运算得出

$$\frac{(4\pi)^6 l^4}{c^4p^2}\frac{\Sigma R_1^3(R_2-R_1)}{(2R_2)^2(R_2^2+R_2R_1+R_1^2)}\leqslant\beta_0^{(1)}-\beta_0^{(2)}\leqslant\frac{c^4p^2}{(4\pi)^6 l^4}\frac{10\Sigma R_1^3}{R_2^2(R_2-R_1)}, \tag{4.8}$$

$$
\frac{(4\pi)^6\ l^2}{c^4p^2(2R_2)^2}\frac{1}{2c}\frac{R_1^3}{R_2^2(R_2^3-R_1^3)}\leqslant\beta_0^{(0)}-\beta_0^{(2)}\leqslant\frac{c^4p^2}{(4\pi)^6 l^4}
$$

$$
\times\frac{2R_1^3}{c(R_2-R_1)^2(6R_1^2+3R_1R_2+R_2^2)}, \tag{4.9}
$$

$$
\frac{(4\pi)^6\ l^4(R_2-R_1)(6R_1^2+3R_1R_2+R_2^2)\Sigma}{4c^4p^2R_2^2(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)}+\frac{(4\pi)^6\ l^2}{2c^4p^2(2R_2)^2}\frac{R_1^3}{cR_2^2(R_2^3-R_1^3)}\leqslant
$$

$$
\leqslant\beta_0^{(0)}+\Sigma-\beta_0^{(1)}\leqslant\frac{c^4p^2}{(4\pi)^6\ l^4}\left[\frac{3\Sigma R_2^2}{R_2-R_1}+\frac{2R_1^3}{cR_2^3(R_2-R_1)}\right]. \tag{4.10}
$$

作者对田方增先生、金星南先生的指正、阮可强等同志的热情支持致谢。

参 考 文 献

[1] B. Davison, Neutron Transport Theory, Oxford Univ. Press, 1957.
[2] K. Jörgens, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**, 219 (1758).
[3] R. S. Nelkin, *Physica*, **29**, 261 (1963].
[4] R. Van Norton, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15**, 149 (1962).
[5] I. Vidav, *J. Math. Anal. Appl.*, **22**, 144 (1968).
[6] S. Ukai et al., *Nucl. Sci. Tech.*, **9**, 36 (1972).
[7] O. J. Smith et al., *J. Nucl. Energy*, **22**, 579 (1968).
[8] I. Marek, *SIAM J. Appl. Math.*, **19**, 607 (1970).
[9] M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, Am. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 15, New York, 1932.
[10] G. H. Hardy et al., Inequalities, Cambridge Univ., 1952.

(上接第 64 页)

2°31′, 同本实验以径迹长度对蚀刻时间关系曲线确定的临界角比较, 和用沿裂片潜伏径迹的后 1/3 段的平均径迹蚀刻率所确定的临界角值 2° 接近。但对于云母该文献实验得出的临界角为 4°30′, 这可能包括了其它的效应在内。我们的实际测量表明，云母的表面浸蚀率很小。聚碳酸酯和云母是常用的、也是较好的径迹探测固体，很适用于中子通量测定。而对于长时间的中子累积剂量测量，或探测固体需长时间同裂变物质层接触，涤纶是适用的。因涤纶对 α 不灵敏，不受其干扰，又可以做得很薄，适于火花计数。云母本身含有微量的天然裂变元素，用云母作低剂量测定时，通常在事前应先进行预蚀刻，以便区分由于自发裂变产生的本底的径迹。

参 考 文 献

[1] H. A. Khan et al., *Nucl. Instrum. Methods*, **98**, 229 (1972).
[2] P. W. Fank, WAPD-BT-30 (1964).
[3] T. Niday, *Phys. Rev.*, **121**, 1471 (1961).
[4] 郭士伦等，原子能科学技术， 1,65 (1976).
[5] K. Becker, *Health Phys.*, **12**, 769 (1966).
[6] 鹤田隆雄，原子能译丛，1, 49 (1974).