

(续上期)

复合核反应及核反应的统计理论(续)

苏宗滌

在核反应的统计理论中考虑了角动量效应而至今仍是卓有成效的理论是Hauser-Feshbach理论^[14] (以下简称H-F理论)。1952年, W. Hauser和H. Feshbach在总结当时核反应成就的基础上提出复合核反应截面的计算公式。H-F理论不仅在实际应用中被广泛使用, 而且对理论的发展也起了极其重要的作用。略去直接相互作用, 并假定复合核的衰变和形成无关及道-道不相干, 那么平均截面可以写成:

$$\bar{\sigma}_{cc'} = \pi \lambda_c^2 \left\{ \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{\Gamma_{\mu c} \Gamma_{\mu c'}}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle_{\mu} \right\}. \quad (40)$$

其中 $\Gamma_{\mu c}$ 是共振态 μ 的 c 道分宽度, 而 μ 的总宽度 $\Gamma_{\mu} = \sum_{c''} \Gamma_{\mu c''}$ 。 $\langle \rangle_{\mu}$ 表示在 \mathcal{W} 内对 N 个共振态求平均, 即

$$\langle f \rangle_{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^N f_{\mu}, \quad (41)$$

$$\sum_{\mu} \longleftrightarrow \frac{1}{D} \int d\varepsilon.$$

在分立共振区, 穿透系数 T_c 和 $\langle \Gamma_{\mu c} \rangle_{\mu}$ 满足:

$$T_c = 2\pi \langle \Gamma_{\mu c} \rangle_{\mu} / D. \quad (42)$$

其中 D 是能级平均间距。把(42)式代入到(40)式中就可得到一般常见的H-F公式:

$$\bar{\sigma}_{cc'} = \pi \lambda_c^2 T_c \frac{T_{c'}}{\sum_{c''} T_{c''}}. \quad (43)$$

H-F公式的物理意义和蒸发模型一样可写成两个独立因子的乘积, 其中 $\pi \lambda_c^2 T_c$ 是复合核形成截面, 而 $T_{c'} / \sum_{c''} T_{c''}$ 意味着复合核通过不同反应道的衰变是由分支比决定的, 而和复合核的形成无关。换句话说, H-F公式给出各个出射道的截面是和每个道的穿透系数成比例, 这就是H-F理论给出的复合核反应截面的分配规律。

H-F理论对于连续共振区至今还没有严格的证明, 但由于计算简单仍被广泛使用, H-F公式全部归结为计算穿透系数, 对于粒子道无论是入射道还是出射道的穿透系数都可由光学模型计算得到。

在第一节我们曾指出能级的宽度是有涨落的, 而且是服从一定的统计分布。那么这时 $\left\langle \frac{\Gamma_{\mu c} \Gamma_{\mu c'}}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle_{\mu}$ 一般并不等于 $\frac{\langle \Gamma_{\mu c} \rangle_{\mu} \langle \Gamma_{\mu c'} \rangle_{\mu}}{\langle \Gamma_{\mu} \rangle_{\mu}}$, 为此引入宽度涨落修正因子:

$$W_{cc'} = \left\langle \frac{\Gamma_{\mu c} \Gamma_{\mu c'}}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle_{\mu} / \frac{\langle \Gamma_{\mu c} \rangle_{\mu} \langle \Gamma_{\mu c'} \rangle_{\mu}}{\langle \Gamma_{\mu} \rangle_{\mu}} \quad (44)$$

这样就得到带宽度涨落修正的 H-F 公式^[15] (以下简记为 WHF):

$$\overline{\sigma_{cc'}} = \pi k_c^2 T_c \frac{T_{c'}}{\sum_{c''} T_{c''}} W_{cc'} \quad (45)$$

所谓宽度涨落是指量

$$\chi_c = \Gamma_{\mu c} / \langle \Gamma_{\mu c} \rangle_{\mu} \quad (46)$$

通常假定服从 $\nu=1$ 的 χ^2 分布 (见公式(2)), 把(46)代入到(44)式可得:

$$W_{cc'} = \frac{\chi_c \chi_{c'}}{\sum_{c''} \chi_{c''} \langle \Gamma_{\mu c''} \rangle_{\mu} / \langle \Gamma_{\mu} \rangle_{\mu}}$$

令 $P_{c''} = \langle \Gamma_{\mu c''} \rangle_{\mu} / \langle \Gamma_{\mu} \rangle_{\mu}$, 对于所有道 c'' , 都服从 $P_1(x)dx$ 分布, 那么

$$W_{cc'} = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\chi_c \chi_{c'}}{\sum_{c''} \chi_{c''} P_{c''}} \prod_{c''} P_1(\chi_{c''}) d\chi_{c''}$$

经过一些积分运算^[16], 最后得到:

$$W_{cc'} = (1 + 2 \delta_{cc'}) \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + 2 P_c t)(1 + 2 P_{c'} t) \prod_{c''} (1 + 2 P_{c''} t)^{1/2}} \quad (47)$$

宽度涨落修正对于截面计算的影响, 很多地方都有讨论^[17,16], 从(47)式也可看出, $W_{cc'}$ 一般要增强弹性截面 (可增大 2~3 倍), 而减小非弹截面, 当然弹性截面的增加部分应当等于各个非弹截面减少的部分之和, 只有这样才能保证吸收截面自洽的分配给各个反应的分截面。在反应中包括剩余核处于连续区的粒子发射、裂变及辐射俘获等过程时, 宽度涨落修正的处理会有一些困难, 在文献[16]中给出一个简单的统一处理方法。在开

道很多的情况下, 可期望忽略宽度涨落修正, 即 $\sum_{c''} 1 \rightarrow \infty$ 时 $W_{cc'} \rightarrow 1$ 。

宽度涨落修正是对复合核反应中的一个重要统计参量 $\Gamma_{\mu c}$ 所作的修正, 而使理论结果更好的符合实验值。下面我们将讨论 Moldauer 理论^[17] (简记为 M 理论), 是考虑了能级间的关联, 这个效应是对另一统计参量 D 作的修正。

M 理论是从复边值 R 矩阵理论出发, 把 S 矩阵元展成下面的形式。

$$S_{cc'} = S_{cc'}^0 + S_{cc'}^1, \quad (48)$$

$$S_{cc'}^1 = -i \sum_{\mu} \frac{g_{\mu c} g_{\mu c'}}{E - E_{\mu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\mu}}$$

其中 $|g_{\mu c}|^2 = N_{\mu} \Gamma_{\mu c}$ (49)

而 $N_{\mu} = \int_{\mathcal{V}} |\chi_{\mu}|^2 d\tau$, 即内域本征函数的迭积, 目前各种模型都有 $N_{\mu} \geq 1$ 。(49) 式两端对开道求和得:

$$N_{\mu} \Gamma_{\mu} = \sum_{\mu} |g_{\mu c}|^2. \quad (50)$$

这个表达式反映了总宽度和分宽度之间的关系，被认为是一种类型的关联^[18]。

按照求 $\sigma_{cc'}^{f_i}$ 的表达式 (29) 可归结为计算 $\langle |S_{cc'}^{f_i}|^2 \rangle$ ，从(48)式的第一式可以得到，

$$S_{cc'}^{f_i} = S_{cc'} - \overline{S_{cc'}} = S_{cc'}^1 - \overline{S_{cc'}^1}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{cc'}^{f_i} &= \pi \lambda_c^2 \langle |S_{cc'}^{f_i}|^2 \rangle \\ &= \pi \lambda_c^2 \{ \langle |S_{cc'}^1|^2 \rangle - | \langle S_{cc'}^1 \rangle |^2 \}. \end{aligned} \quad (52)$$

下面分别计算 $\langle S_{cc'}^1 S_{cc'}^{1*} \rangle$ 及 $\langle S_{cc'}^1 \rangle$ ，它们均涉及到形如

$$\frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \sum_{\mu} \frac{g_{\mu c} g_{\mu c'}}{E - E_{\mu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\mu}} dE = \frac{1}{W} \sum_{\mu} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{g_{\mu c} g_{\mu c'}}{E - E_{\mu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\mu}} dE$$

的积分，其中被积函数在能量复平面的上半平面是解析的，利用迴路积分并把能量平均换成对共振态求平均(见公式(41))得到：

$$\frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \sum_{\mu} \frac{g_{\mu c} g_{\mu c'}}{E - E_{\mu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\mu}} dE = -i\pi \frac{\langle g_{\mu c} g_{\mu c'} \rangle_{\mu}}{D}, \quad (53)$$

$$\therefore | \langle S_{cc'}^1 \rangle |^2 = \frac{\pi^2}{D^2} | \langle g_{\mu c} g_{\mu c'} \rangle_{\mu} |^2, \quad (54)$$

而 $\langle |S_{cc'}^1|^2 \rangle = \frac{1}{W} \sum_{\mu\nu} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{g_{\mu c} g_{\mu c'} g_{\nu c}^* g_{\nu c'}^*}{\left(E - E_{\mu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\mu} \right) \left(E - E_{\nu} - \frac{i}{2} \Gamma_{\nu} \right)} dE,$

其被积函数在能量复平面的上、下半平面上都有奇点，如同计算(53)式，迴路取在上半平面，在迴路上的积分利用(53)式的结果，则

$$\begin{aligned} \langle |S_{cc'}^1|^2 \rangle &= \left(-i\pi \frac{\langle g_{\mu c} g_{\mu c'} \rangle_{\mu}}{D} \right) \left(-i\pi \frac{\langle g_{\nu c}^* g_{\nu c'}^* \rangle_{\nu}}{D} \right) \\ &\quad + \frac{2\pi i}{W} \sum_{\nu \in (W)} R^+ \left(E_{\nu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\nu} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

其第二项就是 W 内所有的残数。我们还注意到反应中形成确定的复合核态，因此我们总是考察能量间距 W 内那些具有相同 J, π 的共振能级，在上面式中出现的对 μ 和 ν 的求和，均属 W 内相同 J, π 的共振能级序列，在求上式的残数时，我们分别就 $\mu = \nu$ 和 $\mu \neq \nu$ 两种情况讨论，其残数是：

$$\frac{2\pi i}{W} \sum_{\nu} R^+ \left(E_{\nu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\nu} \right) = \frac{2\pi i}{W} \sum_{\mu\nu} \frac{g_{\mu c} g_{\mu c'} g_{\nu c}^* g_{\nu c'}^*}{E_{\nu} - E_{\mu} + \frac{i}{2} (\Gamma_{\nu} + \Gamma_{\mu})}. \quad (56)$$

$\mu = \nu$ 时， $E_{\mu} = E_{\nu}$ ， $\Gamma_{\mu} = \Gamma_{\nu}$ ，

$$\frac{2\pi i}{W} \sum_{\nu} R^+ \left(E_{\nu} + \frac{i}{2} \Gamma_{\nu} \right) = \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{|g_{\mu c}|^2 |g_{\mu c'}|^2}{\Gamma_{\mu}} \right\rangle_{\mu}. \quad (57)$$

$\mu \neq \nu$ 时，有能级-能级关联的情况。所谓能级间的关联是由于能级间的排斥效应，而改变

了共振能级的间距，并用一定的分布函数给出。如果我们取 Dyson^[19] 的两个能级的关联函数 R_2 ：

$$DR_2(\varepsilon) = 1 - [S(y)]^2 - \frac{dS(y)}{dy} \int_y^\infty S(t) dt;$$

$$S(y) = \sin y / y, \quad y = \pi |e| / D,$$

那么 $DR_2(\varepsilon)$ 表示距 E_μ 为 ε 的地方找到和 E_μ 有相同自旋和宇称的另一条能级 E_ν 的可能性。 $R_2(\varepsilon)$ 是一个随能量 ε 变化很快的单调递增函数，在不到三个 D 的范围内，就等于其渐近值 $1/D$ ，即这时 $DR_2(\varepsilon) = 1$ ，由此可见这里考虑的是一种短程的能级关联。把 (56) 式中 $\sum_{\nu(\neq\mu)}$ 用积分代替，考虑到其分布为 $DR_2(|\varepsilon_\mu - E_\nu|)$ ，并令：

$$\Phi_0\left(\frac{\Gamma}{D}\right) = -i \frac{D}{\pi} \int \frac{R_2(\varepsilon)}{\varepsilon - i\Gamma} d\varepsilon, \quad (58)$$

则 $\mu \neq \nu$ 时，

$$\frac{2\pi i}{W} \sum_{\nu} R^* \left(E_\nu + \frac{i}{2} \Gamma_\nu \right) = \frac{2\pi^2}{D^2} \langle g_{\mu c} g_{\mu c'} g_{\nu c}^* g_{\nu c'}^* \Phi_0[(\Gamma_\nu + \Gamma_\mu)/2D] \rangle_{\mu \neq \nu}. \quad (59)$$

把 $\mu \neq \nu$ 和 $\mu = \nu$ 的结果 (见 (57) 式及 (59) 式) 代入到 (55) 式得：

$$\begin{aligned} \langle |S_{c'c'}|^2 \rangle &= -\frac{\pi^2}{D^2} |\langle g_{\mu c} g_{\mu c'} \rangle_\mu|^2 + \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{|g_{\mu c}|^2 |g_{\mu c'}|^2}{\Gamma_\mu} \right\rangle_\mu \\ &+ \frac{2\pi^2}{D^2} \langle g_{\mu c} g_{\mu c'} g_{\nu c}^* g_{\nu c'}^* \Phi_0[(\Gamma_\mu + \Gamma_\nu)/2D] \rangle_{\mu \neq \nu}, \end{aligned}$$

把上式的结果和 (54) 的结果代入到 (52) 式，则

$$\sigma_{cc'}^{I_1 I_1} = \pi \lambda_c^2 \left\{ \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{|g_{\mu c}|^2 |g_{\mu c'}|^2}{\Gamma_\mu} \right\rangle_\mu - M_{cc'} \right\}, \quad (60)$$

其中 $M_{cc'} = \frac{2\pi^2}{D^2} \{ |\langle g_{\mu c} g_{\mu c'} \rangle_\mu|^2 - \langle g_{\mu c} g_{\mu c'} g_{\nu c}^* g_{\nu c'}^* \Phi_0[(\Gamma_\mu + \Gamma_\nu)/2D] \rangle_{\mu \neq \nu} \}, \quad (61)$

令 $\Theta_{\mu c} = \frac{2\pi}{D} N_\mu^2 \Gamma_{\mu c} = \frac{2\pi}{D} N_\mu |g_{\mu c}|^2, \quad (62)$

那么 $\Theta_\mu = \sum_c \Theta_{\mu c} = \frac{2\pi}{D} N_\mu^2 \Gamma_\mu,$

代入到 (60) 式中，则

$$\sigma_{cc'}^{I_1 I_1} = \pi \lambda_c^2 \left\{ \left\langle \frac{\Theta_{\mu c} \Theta_{\mu c'}}{\Theta_\mu} \right\rangle_\mu - M_{cc'} \right\}. \quad (63)$$

与 H-F 公式比较，其第一项在形式上是和 H-F 公式等当的，而多出一项 $M_{cc'}$ ，称为共振相干项，在无能级-能级关联时， $R_2(\varepsilon) = \frac{1}{D}$ ，从 (58) 式可以得到 $\Phi_0\left(\frac{\Gamma}{D}\right) = 1$ ，而 $M_{cc'} = 0$ 。

由此可见， $M_{cc'}$ 是考虑能级关联的结果。下面的问题就是如何用我们熟知的穿透系数来表示平均共振吸收系数 $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_\mu$ ，及在一定的简化假设下计算 $M_{cc'}$ 。

$$\therefore \langle |S_{cc'}|^2 \rangle - \langle |S_{cc'}| \rangle^2 = \frac{2\pi}{D} \left\langle \frac{|g_{\mu c}|^2 |g_{\mu c'}|^2}{\Gamma_\mu} \right\rangle_\mu - M_{cc'},$$

两端对 c' 求和，并注意到 (62) 式，

$$\langle \Theta_{\mu c} \rangle_\mu = \sum_{c'} \langle |S_{cc'}|^2 \rangle - \sum_{c'} \langle |S_{cc'}| \rangle^2 + \sum_{c'} M_{cc'}$$

$$= T_c - \sum'_{c'(\neq c)} |\langle S_{cc'} \rangle|^2 + \sum'_{c'} M_{cc'},$$

或

$$T_c = \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} - \sum'_{c'} M_{cc'} + \sum'_{c'} |\langle S_{cc'} \rangle|^2$$

$$= \sum'_{c'} \{ \langle |S_{cc'}|^2 \rangle - |\langle S_{cc'} \rangle|^2 \} + \sum'_{c'} |\langle S_{cc'} \rangle|^2. \quad (64)$$

用 $\pi \lambda_c^2$ 乘(64)式的两端, 则

$$\pi \lambda_c^2 T_c = \pi \lambda_c^2 \sum'_{c'} \{ \langle |S_{cc'}|^2 \rangle - |\langle S_{cc'} \rangle|^2 \} + \pi \lambda_c^2 \sum'_{c'} |\langle S_{cc'} \rangle|^2.$$

其左端正好是 $\sigma_{\text{abs}}(c)$, 而右端的第一项是 $\sum'_{c'} \sigma_{cc'}^{f'}$, 第二项是除形状弹性散射截面之外的所有直接反应的截面之和, 即(22)式的结果:

$$\sigma_{\text{abs}}(c) = \sum'_{c'} \sigma_{cc'}^{f'} + \sum'_{c'} \sigma_{cc'}^{d'}.$$

那么相应的穿透系数 T_c , 也可分成两部分:

$$T_c = T_c^{cN} + T_c^{DR}, \quad (65)$$

它们分别为:

$$T_c^{cN} = \sum'_{c'} \{ \langle |S_{cc'}|^2 \rangle - |\langle S_{cc'} \rangle|^2 \}$$

$$= \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} - \sum'_{c'} M_{cc'}, \quad (66)$$

$$T_c^{DR} = \sum'_{c'} |\langle S_{cc'} \rangle|^2. \quad (67)$$

我们知道, 穿透系数 T_c 描写了入射道 c 的入射流由于相互作用而消失的部分, 所谓消失部分, 即发生反应后, 以其它的可能的开道出射。那么 T_c 的两部分分别反映了由复合核反应及直接反应引起 c 道流的消失。

在不考虑直接反应时, $T_c = T_c^{cN}$,

$$T_c = \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} - \sum'_{c'} M_{cc'}. \quad (68)$$

当然, 在实际的计算中还必须作进一步地简化假设, 最重要和最常用的假定就是无道-道关联的假定。道-道关联被认为是和直接相互作用相联系的另一种类型的关联。无道-道关联是指

$$\langle g_{\mu c} g_{\mu c'} \rangle_{\mu} = \delta_{cc'} \langle g_{\mu c}^2 \rangle_{\mu}. \quad (69)$$

对于这个假定的依据可以这样来理解, 在反应过程中由于达到了统计平衡, 而所有的开道是如此之多, 每个道的振幅又是完全无规位相, 以至任意两个不同道的振幅的统计平均为零。在此假设之下,

$$M_{cc'} = \delta_{cc'} \frac{2\pi^2}{D^2} \left\{ |\langle g_{\mu c}^2 \rangle|^2 - \left\langle g_{\mu c}^2 g_{\nu c}^{*2} \Phi_0 \left(\frac{\Gamma_{\mu} + \Gamma_{\nu}}{2D} \right) \right\rangle_{\mu \neq \nu} \right\}.$$

又考虑到这样的事实，在开道很多时， $\Gamma_{\mu} + \Gamma_{\nu}$ 的涨落很小，而 Φ_0 又是它的自变量的缓变函数，因此可从平均号中提出，

$$M_{cc'} = \delta_{cc'} \frac{2\pi^2}{D^2} |\langle g_{\mu c}^2 \rangle|^2 (1 - \Phi_0).$$

$g_{\mu c}$ 是一个无规量，它满足一定的统计分布，这种分布使得量

$$b_c = \langle g_{\mu c}^2 \rangle_{\mu} / \langle |g_{\mu c}|^2 \rangle_{\mu} \quad (70)$$

取一定的值，并令 $B_c = |b_c|^2$ ，在能量较低的情况下，分宽度服从 Porter-Thomas 分布时， $B_c = 1$ ，反之当为 Gauss 分布时， $B_c = 0$ 。在一般情况下， B_c 取 0 和 1 之间。利用(70)式，则

$$M_{cc'} = \delta_{cc'} \frac{B_c}{N} \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu}^2 (1 - \Phi_0),$$

其中

$$N = \langle N_{\mu} \rangle_{\mu}.$$

并令

$$Q_c = \frac{2B_c}{N^2} (1 - \Phi_0), \quad (71)$$

$$M_{cc'} = \frac{1}{4} \delta_{cc'} Q_c \langle \Theta_{\mu} \rangle_{\mu}^2,$$

代入 (68) 式，则

$$T_c = \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} - \frac{Q_c}{4} \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu}^2,$$

其解为

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} &= T_c + \frac{1}{Q} [1 - \sqrt{1 - Q_c T_c}]^2 \\ &= \frac{2}{Q_c} [1 - \sqrt{1 - Q_c T_c}], \end{aligned} \quad (72)$$

而

$$M_{cc'} = \delta_{cc'} \frac{1}{Q_c} [1 - \sqrt{1 - Q_c T_c}]^2,$$

$$\sigma_{cc'}^{11} = \pi \lambda_c^2 \left\{ \frac{\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} \langle \Theta_{\mu c'} \rangle_{\mu}}{\langle \Theta_{\mu} \rangle_{\mu}} W_{cc'} - \frac{\delta_{cc'}}{Q_c} [1 - \sqrt{1 - Q_c T_c}]^2 \right\}. \quad (73)$$

其中

$$W_{cc'} = \left\langle \frac{\Theta_{\mu c} \Theta_{\mu c'}}{\Theta_{\mu}} \right\rangle_{\mu} / \frac{\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} \langle \Theta_{\mu c'} \rangle_{\mu}}{\langle \Theta_{\mu} \rangle_{\mu}} \quad (74)$$

为宽度涨落修正因子。公式 (73) 就是在无直接相互作用下 M 理论计算复合核反应截面的基本公式，式中的平均共振吸收系统 $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu}$ 和光学模型计算出的 T_c 通过(72)式相联系。在公式(73)中，其第一项在形式上是和 WHF 公式完全一样，只不过用 $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu}$ 等代替 T_c ，多出的第二项来自能级-能级关联的修正，而唯一待确定的是量 Q_c 。下面我们就来讨论 Q_c ，以及 M 理论和 H-F 理论的关系，能级-能级关联修正对截面计算值的影响。

最简单情况是无能级-能级的关联，或者当 Γ/D 足够大时（即相当于 $\sum_{\mu} 1 \rightarrow \infty$ ），

Φ_0 就等于或趋于 1，而 $Q_c = 0$ ，因此 $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} = T_c$ ，M 理论的截面公式就变成 WHF 公式 (45)。

还有一种情况，当所有的 T_c 都是小值时，把(72)式的第一式的根号展开，

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} &\simeq T_c + \frac{1}{Q_c} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} Q_c T_c \right) \right]^2 \\ &= T_c + \frac{1}{4} Q_c T_c^2 = T_c, \end{aligned}$$

则又可得到 WHF 的结果。

与上面情况相反，当 T_c 不是小量而逐渐增大，从(72)式可以看出，由于有 $\frac{1}{Q_c} [1 - \sqrt{1 - Q_c T_c}]^2$ 项，使 $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu}$ 有较 T_c 更快的增加， $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu}$ 和 T_c 的差也愈来愈大，特别是在 $\Phi_0 = 0$ 时， $\langle \Theta_{\mu c} \rangle_{\mu} - T_c$ 取最大的值。由此可见，随着 T_c 的增大，或 Φ_0 的减小，能级-能级关联的修正也愈明显。对截面计算的影响，一般而言它将减小复合核弹性散射截面，增大非弹截面，正好和宽度涨落修正的效应相反，不过对截面的影响，比之宽度涨落修正，只能算第二位^[12]。为了表明 H-F、WHF 及 M 理论对截面计算的修正以及各种理论和实验结果的比较我们在图 16 中给出 $^{56}\text{Fe}(n, n')^{56}\text{Fe}^*(0.845 \text{ MeV})$ 反应的微分截面，图中的实线和虚线分别是由普适光学模型参数及最佳符合光学模型参数的计算结果，计算方法分别采用了 H-F 公式，WHF 公式（即相当于 $Q=0$ ）及 M 理论。从图上可以看到各种效应对截面计算的影响以及和实验符合的情况。

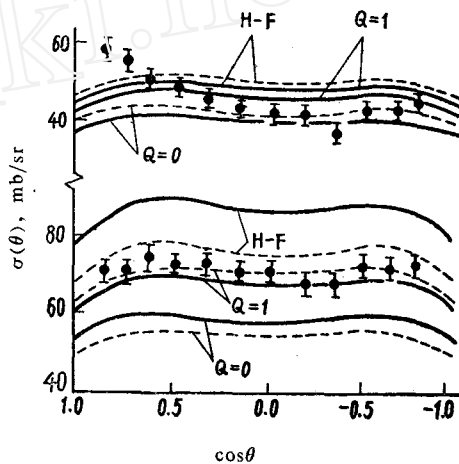


图 16 用 H-F 公式，WHF 公式 ($Q=0$) 及 M 理论 ($Q=1$) 计算 $^{56}\text{Fe}(n, n')^{56}\text{Fe}^*(0.845 \text{ MeV})$ 反应的微分截面的比较^[4]

关于 Q_c 的值，在早期都是取为 0~2 的常数，当 $Q_c = 0$ 时就回到了 WHF， $Q_c \rightarrow 0$ 就意味着考虑了能级间的关联，这种处理方法有可能使得截面计算值不合理，后来改用了迭代法^[20]。对后者这里不再赘述，只是指出计算 Q_c (见公式(71))时，其中所包括的两个参数的取值范围见表 1。

表 1 B, N 的取值范围

参 数	取 值 范 围	$\Gamma/D \rightarrow 0$	$\Gamma/D \rightarrow \infty$
B	$1 \leq B \leq 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
N	$N \geq 1$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow \infty$

M 理论是在六十年代发展起来的并成为复合核反应中应用最广泛的方法之一。应当说 M 理论比 H-F 理论前进了一大步，它考虑了更多的物理效应，也不要求 $\Gamma \ll D$ ，而其结果在某种极限情况下(包括 Γ/D 很大，或所有的 T_c 都很小)都可以回到 H-F 理论。但是 M 理论也有其不足和困难之处，例如它也没有考虑和直接反应相联系的道-道关联，这对纯复合核反应来说当然是可以的，不过(50)式反映出在不同道的 $g_{\mu c}$ 之间存在着关联；又如 M 理论有大数相减的困难^[21]。正是由于这样一些原因，Moldauer 在 1975 年又对其理论作了进一步的发展^[22]。他分析了产生困难的原因，并用计算机统计试验证明了有 M 对

消, 在此基础上讨论了直接反应对复合核过程的影响。

几乎是同时, Weidenmüller等人提出了他们的理论^[23], 他们的工作除了理论本身的意义之外, 值得特别提出的就是 Engelbrecht-Weidenmüller 变换^[24], 对于包括有直接反应的复合核过程的处理原则上总可以象我们在第二节中指出的通过复么正矩阵使 \bar{S} 对角化, 这样又可采用纯复合反应的理论来处理。

当然在最近几年发展起来的核反应统计理论虽然开始尝试应用于核反应截面计算中, 但还不很成熟, 有些还是建立在统计试验的基础上。总的来说, 对于存在有直接反应情况下的复合核反应理论描述仍然是当前的一个重大课题。除了上面列举的 Weidenmüller 等人的工作、新 Moldauer 理论之外, 还有 Kawai 等人^[25]以及 Kerman 等人^[26]的工作也是很值得注意的。

四、核反应统计理论的应用

核反应统计理论应用得最广泛是和光学模型相配合计算由中子、质子、 α 粒子等等所引起的复合核反应截面。例如铀、钚同位素的中子反应截面的计算^[12], 在反应中包括有裂变、辐射及粒子发射(发射带电粒子的截面很小, 可忽略)等物理过程。在中子入射能量较高时, 由于有 $(n, 2n)$, $(n, 3n)$, $(n, n'f)$ 及 $(n, 2nf)$ 等多次过程, 很费计算时间, 所以可采用预平衡蒸发模型; 对于中子入射能量较低时, 各类截面, 特别是角分布对角动量很敏感, 可采用精细的统计理论。

(72)式是M理论的截面计算公式, 和实验观测截面相应的截面公式还必须对道指标 c 中那些不能观测的量子数(如 l, j, J, π 等)求和及求平均。若用 E_n 表示入射中子的能量(质心系), 而 $e'_k (k=0, 1, \dots, K)$ 表示剩余核的分立能级, 那么

$$\begin{aligned} \sigma_n(E_n, e'_k) &= H(E_n - e'_k) C_2 \sum_{J\pi} (2J+1) \times \\ &\sum_{i,j,i',j'} \left\{ \frac{\langle \Theta_{i,j}(E_n) \rangle_{J\pi} \langle \Theta_{i',j'}(E_n - e'_k) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(e) \rangle_{J\pi}} W_{i,j,i',j'}^{J\pi}(k) \right. \\ &\left. - \delta_{0k} \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \frac{1}{Q_{J\pi}} [1 - \sqrt{1 - Q_{J\pi} T_{i,j}^{J\pi}(E_n)}]^2 \right\}, \\ \langle \Theta_{i,j}(E_n) \rangle_{J\pi} &= \frac{2}{Q_{J\pi}} [1 - \sqrt{1 - Q_{J\pi} T_{i,j}^{J\pi}(E_n)}], \end{aligned} \quad (75)$$

其中

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & x > 0, \end{cases}$$

$$C_2 = 26.126868 \frac{M_A + m_n}{M_A m_n} \frac{1}{E_n} \frac{1}{2I_0 + 1}.$$

$Q_{J\pi}$ 可由下面的方程迭代求出:

$$Q_{J\pi} = \frac{2B}{N^2} \left[1 - \Phi_0 \left(\frac{\langle \Theta(e) \rangle_{J\pi}}{2N^2} \right) \right], \quad (76)$$

$$\Phi_0(x) = 1 - \frac{1}{x} \left[1 - \frac{1}{x} e^{-x} \sinh x \right] - \frac{E_i(x)}{x} \left[\cosh x - \frac{\sinh x}{x} \right],$$

$\langle \Theta(e) \rangle_{J\pi}$ 是激发能为 $e = E_n + B_n$ 的复合核态 $(J\pi)$ 的总平均共振吸收系数:

$$\begin{aligned} \langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi} = & \sum_{k=0}^K H(E_n - \varepsilon'_k) \sum_{l_j} \langle \Theta_{l_j}(E_n - \varepsilon'_k) \rangle_{J\pi} \\ & + T_P^{J\pi}(\varepsilon) + T_Y^{J\pi}(\varepsilon) + T_F^{J\pi}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (77)$$

而
$$T_P^{J\pi}(\varepsilon) = H(E_n - \varepsilon'_k) \int_{\varepsilon_k}^E \sum_{l'_j l''_j} \rho_A^{l'_j l''_j}(x) T_{l'_j l''_j}^{J\pi}(E_n - x) dx,$$

是剩余核处于连续区的总穿透系数； $\rho_A^{l'_j l''_j}(x)$ 是剩余核的能级密度； $T_Y^{J\pi}$ 、 $T_F^{J\pi}$ 分别是辐射和裂变的穿透系数。对于辐射俘获截面：

$$\sigma_{n\gamma}(E_n) = C_2 \sum_{J\pi} (2J+1) \sum_{l_j} \frac{\langle \Theta_{l_j}(E_n) \rangle_{J\pi} T_Y^{J\pi}(\varepsilon)}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}} W_{l_j}^{J\pi}, \quad (78)$$

而对裂变截面和发射粒子后剩余核处于连续区的非弹截面只要把(78)式 $T_Y^{J\pi}$ 分别换成 $T_P^{J\pi}$ 和 $T_F^{J\pi}$ 即可。(75)和(78)式中包括的 $W_{l'_j l''_j}^{J\pi}$ 、 $l'_j l''_j(k)$ 及 $W_{l_j}^{J\pi}$ 是宽度涨落修正因子，按照文献[16]的处理方法，可写成：

$$\begin{aligned} W_{l'_j l''_j}^{J\pi}(k) = & \frac{1+2\delta_{0k}\delta_{l''_j}\delta_{j'}}{2} \int_0^1 \exp\left[-\frac{T_P^{J\pi}+T_F^{J\pi}+T_Y^{J\pi}}{2\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right] \\ & \times y^{-2} \left[1 + \frac{\langle \Theta_{l'_j}(E_n) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-1} \times \left[1 + \frac{\langle \Theta_{l''_j}(E_n - \varepsilon'_k) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-1} \\ & \prod_{kl''_j} \left[1 + \frac{\langle \Theta_{l''_j}(E_n - \varepsilon'_k) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} dy, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} W_{l_j}^{J\pi} = & \frac{1}{2} \int_0^1 \exp\left[-\frac{T_P^{J\pi}+T_F^{J\pi}+T_Y^{J\pi}}{2\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\right] y^{-2} \left[1 + \frac{\langle \Theta_{l_j}(E_n) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\right. \\ & \left.\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]^{-1} \times \prod_{kl''_j} \left[1 + \frac{\langle \Theta_{l''_j}(E_n - \varepsilon'_k) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}}\right]^{-1/2} dy. \end{aligned}$$

此外还可计算剩余核处于分立能级中子发射的角分布：

$$\begin{aligned} \sigma(E_n, \varepsilon'_k, \theta) = & \sum_{L=0,2,4,\dots} B_L(E_n, \varepsilon'_k) P_L(\cos\theta) \\ = & H(E_n - \varepsilon'_k) C_1 \sum_{J\pi} (2J+1) \sum_{l'_j l''_j} \left\{ \frac{\langle \Theta_{l'_j}(E_n) \rangle_{J\pi} \langle \Theta(E_n - \varepsilon'_k) \rangle_{J\pi}}{\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{J\pi}} W_{l'_j l''_j}^{J\pi}(k) \right. \\ & \left. - \delta_{0k} \delta_{l''_j} \delta_{j'} \frac{1}{Q_{J\pi}} [1 - \sqrt{1 - Q_{J\pi} T_{l'_j l''_j}^{J\pi}(E_n)}] \right\} \\ & \times \sum_{L=0,2,\dots} Q_L^J(k, j, j') P_L(\cos\theta), \end{aligned} \quad (80)$$

$P_L(\cos\theta)$ 是Legendre多项式， $Q_L^J(k, j, j')$ 对于自旋为1/2的情况可用递推关系计算^[27]。

核反应统计理论还用于裂变碎块角分布的计算。从Bohr的裂变理论知道，当复合核的激发能接近裂变位垒时，裂变只能通过裂变位垒上少数几个鞍点态发生。虽然这时的复合核已经处于5~6 MeV的激发能上，但其大部分的激发能使核发生变形，所以仍可看作是“冷”的，也即鞍点的激发谱类似于原子核基态附近的谱。通过裂变碎块角分布的研究，可以得到有关鞍点态结构的信息。

裂变碎块角分布能够用核反应统计理论计算：

$$W(\theta, \varepsilon) = \sum_{J\pi K} \sigma_{J\pi}^f(K, \varepsilon) W_{\pm 1/2, \pm K}^J(\theta), \quad (81)$$

其中 K 为 J 在对称轴上的投影，角度部分为：

$$W_{\pm 1/2, \pm K}^J(\theta) = \frac{2J+1}{4} \{ |d_{1/2, K}^J(\theta)|^2 + |d_{-1/2, K}^J(\theta)|^2 \}. \quad (82)$$

$d_{1/2, K}^J(\theta)$ 是转动函数； $\sigma_{J\pi}^f(K, \varepsilon)$ 可由(78)式得到，只不过 $T_{J\pi}^f(\varepsilon)$ 换成 $\sum_K T_{J\pi}^{f,K}(K, \varepsilon)$ 。而

$$T_{J\pi}^{f,K}(K, \varepsilon) = \left[1 + \exp\left(2\pi \frac{B_f(J, \pi, K) - \varepsilon}{\hbar\omega(J, \pi, K)}\right) \right]^{-1}. \quad (83)$$

$$B_f(f, \pi, K) = B_0(J, \pi, K) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \left[J(J+1) - \alpha(-)^{J+1/2} \left(J + \frac{1}{2} \right) \delta_{K, 1/2} \right].$$

其中 \mathcal{I} 为转动惯量； α 为脱耦合系数； $B_0(J, \pi, K)$ ， $\hbar\omega(J, \pi, K)$ 在计算中作为参数。通过和实验符合提供我们关于鞍点态结构、变形的知识。

最近几年在重离子反应中，核反应统计理论得到广泛的应用。从反应机制来看，除了远距离碰撞引起的弹性散射、库仑激发，以及擦边碰撞引起的直接反应之外，还有两类反应是要用统计方法描述的。一类是炮弹和靶核碰撞形成复合核，高激发的复合核的衰变或是通过发射轻粒子（如中子、质子和 α 粒子等），或裂变。前者称为熔合反应，较多发生在较轻的复合核中，通过蒸发各种轻粒子得到如图 17 所示的质量分布。

炮弹和靶核（自旋分别为 J_P, J_T ）在质心能量为 E 形成复合核的截面是：

$$\sigma_{(E)}^{J\pi} = \pi k^2 \frac{(2J+1)}{(2J_P+1)(2J_T+1)} \sum_{S=|J_P-J_T|}^{J_P+J_T} \sum_{l=|J-S|}^{J+S} T_l. \quad (84)$$

其中

$$T_l = \{ 1 + \exp[-(l-l_0)/d] \}^{-1},$$

而所包括的参数 l_0 及 d ，选择使之和实验测量的熔合截面 $\sigma_{CN} = \sum_{J\pi} \sigma_{J\pi}^{J\pi}(E)$ 相符合。

从受激核 1（激发能 ε_1 ，自旋 J_1 ，宇称 π_1 ）蒸发 x 粒子（动能 E'_x ，自旋 S_x ）后得到剩余核 2（ $\varepsilon_2, J_2, \pi_2$ ），其发射速率由穿透系数 $T_1^x(E'_x)$ 及倒易原理得到：

$$R_x dE'_x = \frac{1}{\hbar} \Gamma_x(E'_x) = \frac{\rho_2(\varepsilon_2, J_2, \pi_2)}{2\pi\hbar\rho_1(\varepsilon_1, J_1, \pi_1)} \sum_{S=|J_2-S_x|}^{J_2+S_x} \sum_{l=|J_1-S|}^{J_1+S} T_l^x(E'_x) dE'_x, \quad (85)$$

其中 ρ_1, ρ_2 分别是受激核和剩余核的能级密度。

在重离子反应中另一种类型是深度非弹反应，它介于直接反应和复合核反应之间，并有如下的特征：反应时间约为 10^{-21} s；在反应中碰撞核间有大量的核子转移，相对动能、

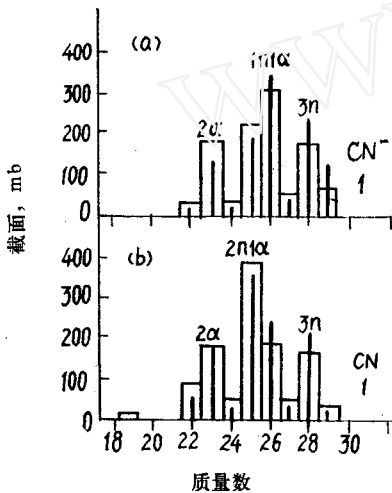


图 17 熔合反应中的质量分布^[28]
方框是实验结果，粗线是理论值，¹⁹F+¹²C；
(a) 50 MeV；(b) 63 MeV。

角动量的耗散；此外由于激发能往往很高，开道多，所以只能用统计描述。关于这方面的研究可参阅文献[29]，我们这里仅简单地讨论有关质量转移的问题。

在重离子深度非弹反应中，炮弹和靶核的质量分别为 A_1 和 A_2 ($A = A_1 + A_2$)，在粗粒化近似下，在各种破碎情况下，第一碎块的质量数 A_1^* (显然 $A_2^* = A - A_1^*$) 和双核系统的总激发能 E_μ^* 把总道空间 \mathcal{H} 分成若干子空间 \mathcal{H}_μ ， $\mu \equiv (A_1^* E_\mu^*)$ ，在 t 时刻每个子空间的占有几率 $P(\mu, t)$ 满足如下的主方程：

$$\frac{d}{dt} P(\nu, t) = \sum_{\mu} W_{\nu\mu} [d_{\nu} P(\mu, t) - d_{\mu} P(\nu, t)]. \quad (86)$$

其中 d_{μ} 是子空间 \mathcal{H}_{μ} 的维度， $W_{\nu\mu}$ 是 \mathcal{H}_{μ} 和 \mathcal{H}_{ν} 之间的跃迁几率。如果能计算 $W_{\nu\mu}$ 及初始条件，通过解主方程就能得到不同反应时刻的质量分布，它是来自非平衡状态的贡献。由于这些初始碎块往往都有很高的激发能，在其后的反应时间，可以从初始碎块蒸发各种粒子，得到可以和实验相比较的质量分布。对于后一过程的描述完全是统计平衡的理论，可以用处理熔合反应的方法来计算。

由于篇幅所限，关于核反应统计理论的应用问题只能简单地例举上述的几个方面。

卓益忠、张竞上、唐学田等同志都仔细地审阅过全文，并提出不少意见，邱成、黎和平同志为本文做了大量的工作，作者谨致谢意。

参 考 文 献

- [14] W. Hauser & H. Feshbach, *Phys. Rev.*, **87**, 366 (1952).
- [15] A. M. Lane et al., *Proc. Phys. Soc.*, **A 70**, 557 (1957).
- [16] 苏宗淦等, 高能物理与核物理, **3**, 81 (1979).
- [17] P. A. Moldaner, *Phys. Rev.*, **123**, 968 (1961); *Phys. Rev.*, **135**, B 642 (1964); *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 1079 (1964).
- [18] C. A. Englbrecht, Conf-730134, 1973.
- [19] J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **3**, 166 (1962).
- [20] C. L. Dunford, AI-AEC-12931 (1970).
- [21] H. A. Weidenmüller, *Phys. Rev.*, **C 9**, 1202 (1974).
- [22] P. A. Moldaner, *Phys. Rev.*, **C 11**, 426 (1975); **C 12**, 744 (1975).
- [23] H. M. Hofmann et al., *Ann. Phys.*, **90**, 403 (1975); J. W. Tepel et al., *Phys. Lett.*, **49B**, 1(1974).
- [24] C. A. Englbrecht & H. A. Weidenmüller, *Phys. Rev.*, **C 8**, 859 (1973).
- [25] M. Kawai et al., *Ann. Phys.*, **75**, 156 (1973).
- [26] A. K. Kerman et al., *Ann. Phys.*, **102**, 570 (1976).
- [27] 苏宗淦等, 原子能科学技术, **4**, 445 (1979).
- [28] F. Pühlhofer, *Nucl. Phys.*, **A 280**, 267 (1977).
- [29] W. Nörenberg & H. A. Weidenmüller, Introduction to the Theory of Heavy-Ion Collisions, Lecture Note in Physics, Vol. 51, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976 and 1979; W. Nörenberg, Transport Theory of Dissipative Heavy-Ion Collisions, GSI-Report 79-5 (1979).

(编辑部收到日期：1979年11月3日)