

三块偏转磁铁组成的消色差系统

陈 银 宝

本文讨论了具有对称平面的、由三块偏转磁铁所组成的、偏转角度为任意的消色差系统。用矩阵法推导了该消色差系统的普遍表示法。最后，对偏转 90° 的消色差系统，给出了具体的计算，并应用于 100 MeV 电子直线加速器束流运输系统的实际设计中。

关键词 偏转磁铁，消色差系统。

一、任务的提出

带电粒子在磁场里的运动轨迹，取决于粒子的动量。因此，具有不同动量的带电粒子，在同一磁场里走不同的路径。这也是具有动量散度的粒子束经过偏转磁铁以后，束流发散的根本原因。在直线加速器的束流运输系统设计中，常常提出消色差的要求，也即要求输出的粒子束流轨迹与束流的动量散度无关。为此，人们曾设计过几种不同用途的消色差系统。如 Penner 消色差方案^[1]与 Enge 消色差方案^[2]已为大家所熟悉和应用。

但是，对于偏转 90° 的动量散度较大（如 $\frac{\Delta p}{p} = \pm 20\%$ 等）的束流，若采用偏转 90° 的 Penner 消色差方案，则要求其对称面上的四极透镜的孔径足够大，而这将使设备的造价大大增加；另一方面，若采用 Enge 的 α 型消色差系统，则结构复杂、造价昂贵，也限制了这种消色差系统的广泛应用。

为了使动量散度大的束流经过大角度偏转后呈现消色差特性，但是又要避免在对称面上的四极透镜孔径过大的缺点，并且在造价上也符合经济的要求，宜采用由三块偏转磁铁所组成的消色差系统。即用一块偏转磁铁于对称面上来代替 Penner 系统中的四极透镜，这正好利用了偏转磁铁在水平方向的充裕空间来容纳束流由动量散度所引起的水平方向的发散。

关于由三块偏转磁铁所组成的消色差系统，国外虽然也曾采用过，但有些对入射束流和偏转角度有一定的限制，有些则未见其文章和公式的公开发表。因此，给出一个偏转任意角度的由三块偏转磁铁所组成的消色差系统的变换矩阵的普遍表示式，是本工作要解决的课题。

二、系统的设计

我们考虑对称系统。根据文献[3]，传输矩阵在对称系统中具有特殊的性质。

设对称系统的前半部分的三维传输矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由矩阵运算可得后半部分的传输矩阵为:

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22} \\ a_{21} & a_{11} & a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是, 整个系统的传输矩阵为:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) & 2a_{12}a_{22} & 2a_{12}a_{23} \\ 2a_{21}a_{11} & (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) & 2a_{11}a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

为了使系统实现双消色差, 也即使得通过系统后的束流轨道的位移和角散均与束流的动量无关, 由(1)式的传输矩阵可以看出, 这就相当于要求 $a_{23}=0$ 或 $a_{11}=a_{12}=0$ 。但若 $a_{11}=a_{12}=0$, 则矩阵(1)的行列式等于零, 故只有 $a_{23}=0$, 这就是对称系统实现消色差的条件。下面, 我们就根据这个条件来设计和计算由三块偏转磁铁组成的消色差系统。

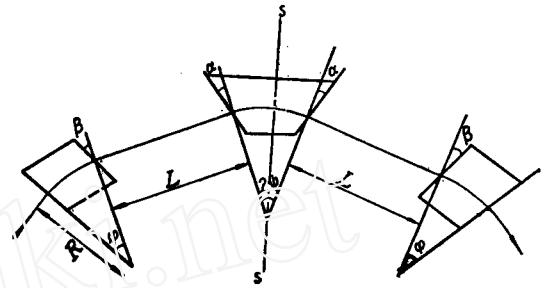


图 1 三块偏转磁铁系统

设由三块偏转磁铁组成的系统如图 1 所示。第一、三块偏转磁铁的偏转角为 φ , 第二块为 2ψ , 第一、三块偏转磁铁的边缘角为 β , 第二块的边缘角为 α 。

对于具有偏转角 φ , 入射角 β_1 , 出射角 β_2 的任意一块偏转磁铁, 其水平方向的变换矩阵为^[1]:

$$M^H(\varphi, \beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\varphi - \beta_1)}{\cos\beta_1} & R\sin\varphi & R(1 - \cos\varphi) \\ -\frac{(1 - \text{tg}\beta_1\text{tg}\beta_2)\sin(\varphi - \beta_1 - \beta_2)}{R\cos(\beta_1 + \beta_2)} & \frac{\cos(\varphi - \beta_2)}{\cos\beta_2} & \sin\varphi + (1 - \cos\varphi)\text{tg}\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

垂直方向的变换矩阵为:

$$M^V(\varphi, \beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} 1 - \varphi\text{tg}\beta_1 & \varphi R \\ -\frac{1}{R}(\text{tg}\beta_1 + \text{tg}\beta_2 - \varphi\text{tg}\beta_1\text{tg}\beta_2) & 1 - \varphi\text{tg}\beta_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

根据公式(2), 由图 1 得对称面上水平方向的变换矩阵为:

$$M^{HS} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\psi + \alpha)}{\cos\alpha} & R\sin\psi & R(1 - \cos\psi) \\ -\frac{\sin(\psi + \alpha)}{R\cos\alpha} & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & R\sin\varphi & R(1 - \cos\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi - \beta)}{R\cos\beta} & \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\cos\beta} & \sin\varphi + (1 - \cos\varphi)\text{tg}\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

(4)式中的 α 、 β 如图 1 所示, 均为正值。经过矩阵运算并化简, 最后可得下列各矩阵元素:

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{Hs} &= \cos(\varphi + \psi) + \cos \varphi \sin \psi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) \\
 &\quad - \frac{L}{2R} \left\{ \frac{\sin[(\varphi + \psi) + (\alpha - \beta)] + \sin[(\varphi - \psi) - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \right\}, \\
 m_{12}^{Hs} &= R \left\{ \sin(\varphi + \psi) + \sin \varphi \sin \psi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L}{2R} \frac{\cos[(\varphi + \psi) + (\alpha - \beta)] + \cos[(\varphi - \psi) - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \right\}, \\
 m_{13}^{Hs} &= R \left\{ 1 - \cos(\varphi + \psi) + \sin \psi (1 - \cos \varphi) (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L}{2R} \frac{\sin[(\varphi + \psi) + (\alpha - \beta)] + \sin[(\varphi - \psi) - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L}{R} (\cos \psi - \sin \psi \text{tg } \alpha) \text{tg } \beta \right\}, \\
 m_{21}^{Hs} &= -\frac{1}{R} \left\{ \sin(\varphi + \psi) - \cos \varphi \cos \psi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L}{2R} \frac{\cos[(\varphi + \psi) + (\alpha - \beta)] - \cos[(\varphi - \psi) - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \right\}, \\
 m_{22}^{Hs} &= \cos(\varphi + \psi) + \sin \varphi \cos \psi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) \\
 &\quad - \frac{L}{2R} \frac{\sin[(\varphi + \psi) + (\alpha - \beta)] - \sin[(\varphi - \psi) - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta}, \\
 m_{23}^{Hs} &= \sin(\varphi + \psi) + \cos \psi (1 - \cos \varphi) (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) \\
 &\quad + \frac{L}{2R} \frac{\cos[(\varphi + \psi) + (\alpha - \beta)] - \cos[(\varphi - \psi) - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \\
 &\quad + \frac{L}{R} (\sin \psi - \cos \psi \text{tg } \alpha) \text{tg } \beta. \tag{5}
 \end{aligned}$$

同样地, 垂直方向的变换矩阵为:

$$M^{Vs} = \begin{bmatrix} 1 + \psi \text{tg } \alpha & \psi R \\ \frac{\text{tg } \alpha}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varphi R \\ -\frac{\text{tg } \beta}{R} & 1 - \varphi \text{tg } \beta \end{bmatrix}. \tag{6}$$

展开得各矩阵元为:

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{Vs} &= 1 - \psi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) - \frac{L}{R} (1 + \psi \text{tg } \alpha) \text{tg } \beta, \\
 m_{12}^{Vs} &= R \left[(\varphi + \psi) - \varphi \psi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) + \frac{L}{R} (1 - \varphi \text{tg } \beta + \psi \text{tg } \alpha - \varphi \psi \text{tg } \alpha \text{tg } \beta) \right], \\
 m_{21}^{Vs} &= -\frac{1}{R} \left(\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha + \frac{L}{R} \text{tg } \alpha \text{tg } \beta \right), \\
 m_{22}^{Vs} &= 1 - \varphi (\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) + \frac{L}{R} (1 - \varphi \text{tg } \beta) \text{tg } \alpha. \tag{7}
 \end{aligned}$$

公式(4)–(7)给出了由三块偏转磁铁组成的偏转任意角度的系统, 在其对称平面上的水平方向和垂直方向的变换矩阵的普遍表示式。

如上所述, 若(5)式中的 $m_{23}^{Hs} = 0$, 则该系统就呈现消色差性质。考虑到水平和垂直方

向在对称面上的聚焦，要求 $m_{11}^{H_s} = 0$ 和 $m_{11}^{V_s} = 0$ 。由此三个方程联立，就可解得边缘角 α 、 β 及间距 L 。但是必须指出，这仅仅是对于平行束而言。对于具有初始发散度的束流，必须要求在对称面上垂直和水平方向的包络取极值的条件与消色差条件 $m_{23}^{H_s} = 0$ 联立求解，关于这方面的工作将另文讨论。本文将就工程实用的简便方法给出具有初始发散度束流的消色差条件的具体计算实例。

三、实 例

现在，我们将上面得到的普遍公式应用于一个偏转 90° 的对称系统中，设具体安排如下： $\varphi = 30^\circ$ ， $\psi = 15^\circ$ ， $R = 1\text{ m}$ ， $L = 2R = 2\text{ m}$ ，如图 2 所示。求满足系统消色差条件的边缘角 α 和 β 。

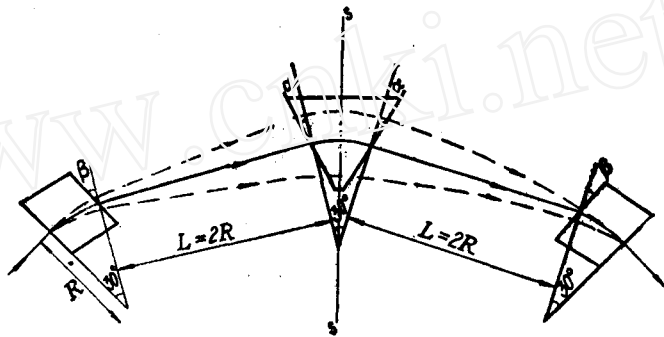


图 2 三块磁铁组成偏转 90° 的消色差系统

将上面的已知条件代入(5)式，得系统对称面上水平方向的变换矩阵元：

$$m_{11}^{H_s} = \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 15^\circ (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) - \frac{\sin[45^\circ + (\alpha - \beta)] + \sin[15^\circ - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$m_{12}^{H_s} = R \left\{ \sin 45^\circ + \sin 30^\circ \sin 15^\circ (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\cos[45^\circ + (\alpha - \beta)] + \cos[15^\circ - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \right\},$$

$$m_{13}^{H_s} = R \left\{ 1 - \cos 45^\circ + \sin 15^\circ (1 - \cos 30^\circ) (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\sin[45^\circ + (\alpha - \beta)] + \sin[15^\circ - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} + 2(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \beta \right\},$$

$$m_{21}^{H_s} = -\frac{1}{R} \left\{ \sin 45^\circ - \cos 30^\circ \cos 15^\circ (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\cos[45^\circ + (\alpha - \beta)] - \cos[15^\circ - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} \right\},$$

$$m_{22}^{H_s} = \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \cos 15^\circ (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) - \frac{\sin[45^\circ + (\alpha - \beta)] - \sin[15^\circ - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$m_{23}^{H_s} = \sin 45^\circ + \cos 15^\circ (1 - \cos 30^\circ) (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) +$$

$$+ \frac{\cos[45^\circ + (\alpha - \beta)] - \cos[15^\circ - (\alpha + \beta)]}{\cos \alpha \cos \beta} + 2(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \beta. \quad (8)$$

由(7)式得系统对称面上垂直方向的变换矩阵元为:

$$\begin{aligned} m_{11}^{vs} &= 1 - \frac{\pi}{12}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) - 2\left(1 + \frac{\pi}{12} \operatorname{tg} \alpha\right) \operatorname{tg} \beta, \\ m_{12}^{vs} &= R \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{72}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + 2\left(1 - \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \beta + \frac{\pi}{12} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\pi^2}{72} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta\right) \right], \\ m_{21}^{vs} &= -\frac{1}{R}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta), \\ m_{22}^{vs} &= 1 - \frac{\pi}{6}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + 2\left(1 - \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \beta\right) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

由消色差条件

$$m_{23}^{ss} = 0,$$

和垂直聚焦条件

$$m_{11}^{vs} = 0,$$

得方程:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\pi}{3} \cos 15^\circ (1 + \sin 30^\circ - \cos 30^\circ) \right] \operatorname{tg}^2 \alpha + \left[\frac{\pi}{6} \sin 45^\circ - 4 \cos 15^\circ (1 - \cos 30^\circ) - \right. \\ & \left. - \left(4 + \frac{\pi}{6}\right) \sin 30^\circ \cos 15^\circ - \frac{\pi}{6} \sin 15^\circ (1 + 2 \sin 30^\circ - \cos 30^\circ) \right] \operatorname{tg} \alpha + \\ & + \left[\left(2 + \frac{\pi}{12}\right) \sin 45^\circ - \left(4 + \frac{\pi}{6}\right) \sin 30^\circ \sin 15^\circ + \cos 15^\circ (1 - \cos 30^\circ) - \right. \\ & \left. - 2 \sin 15^\circ (1 - \cos 30^\circ) \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

和关系式:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 + \frac{\pi}{12} \operatorname{tg} \alpha}{2 + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \alpha}. \quad (11)$$

由此解得:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0.3923, \\ \operatorname{tg} \beta = 0.4469; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 21.42^\circ, \\ \beta = 24.08^\circ. \end{cases} \quad (12)$$

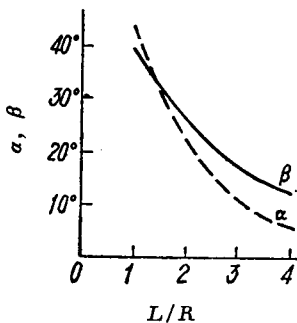


图 3 满足消色差条件的边缘角 α, β 随 L/R 变化关系

在上面的三块偏转磁铁组成的偏转 90° 的消色差系统中, 如保持 φ, ψ 和 R 的数值不变, 而改变 L 的数值, 则如同上述一样的步骤, 可以求得满足系统消色差条件的边缘角 α 和 β 的不同值, 如表 1 所示, 相应的曲线如图 3 所示。

对于具有初始发散度的束流, 我们要求在消色差系统的对称面上束流的包络尽可能地小, 为此, 我们将表 1 中的各类数值代入(5)式和(7)式, 从而求得相应的水平和垂直方向的传输矩阵 M^{Hs} 和 M^{Vs} , 再由关系式

$$\begin{cases} \sigma_{xs}^H = M^{Hs} \sigma_{x0} \tilde{M}^{Hs}, \\ \sigma_{ys}^V = M^{Vs} \sigma_{y0} \tilde{M}^{Vs}, \end{cases}$$

表 1 满足消色差条件的边缘角关系

L/R	1	2	3	4
$\operatorname{tg} \alpha$	0.9120	0.3923	0.1924	0.0858
α	42.36°	21.42°	10.89°	4.90°
$\operatorname{tg} \beta$	0.8255	0.4469	0.3078	0.2350
β	39.54°	24.08°	17.11°	13.22°

求出相应的束流 σ 矩阵, 最后, 由 σ 矩阵的对角线元素得出束流的包络和发散角如表 2 所列。在计算中, 我们假设束流进入消色差系统时为束腰入射, 束流初始发散度 $\varepsilon = 0.203 \times 10^{-8} \text{cm} \cdot \text{rad}$, $x_0 = 0.423 \text{cm}$, $y_0 = 0.528 \text{cm}$, $\frac{\Delta p}{p} = 20\%$, $R = 1 \text{m}$ 。绘出相应的曲线如图 4 所示。

表 2 对称面上束流包络和发散角随 L/R 变化关系

L/R	1	2	3	4
x_s (cm)	14.71	25.24	35.63	46.08
x'_s (10^{-3}rad)	4.35	2.21	1.30	0.80
y_s (cm)	0.06	0.09	0.13	0.17
y'_s (10^{-3}rad)	3.57	2.21	1.64	1.30

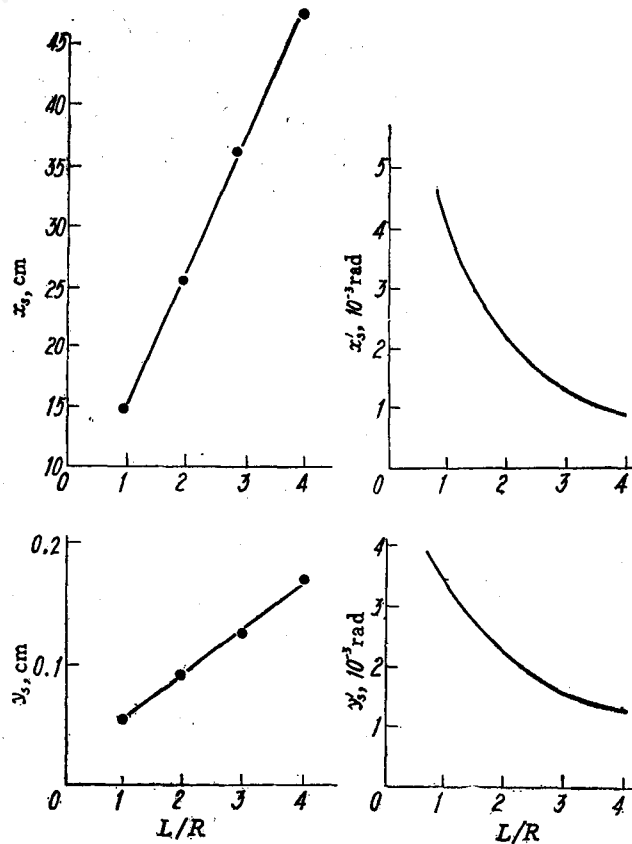


图 4 对称面上束流包络和发散角随 L/R 变化关系 (下转第 530 页)

因此使 ϵ 有一增加量, 这一原因当然也与 η 有关。 ϵ 的增加就使得 γ 增大。

另外从间隔分布法可测得比值 ϵ/β^2_{eff} , 这样单独测量 ϵ 就可求出 β_{eff} 。

从上面可知, 间隔分布法测量反应堆动态参数是一个比较好的方法。但在数据处理时, 初值要选得合理, 否则由于函数的多极值性质可能给出的不是所要求的值。

参加本工作的还有兰义正、高雅云、杜呈瑞、闵伯武、陈绍能、赵文军、蒋廷三、张文娟、阎俊英、杨秀敏、陈国惠、刘毅、常增印等。

参 考 文 献

[1] D. Babala, KR-114(1966).
 [2] 宋奎、白福忠, 间隔分布法控制线路, 内部资料, 1979年。
 [3] 刘仁康、史永谦, 间隔分布法测量动态参数计算, 内部资料, 1980年。
 [4] 罗安仁等, DF-3 铀水零功率堆的临界质量与中子通量分布, 内部资料, 1962年。
 [5] 赵郁森等, 脉冲法测量反应堆的次临界度, 反应堆物理(1977年反应堆物理工作交流会资料汇编), 54页, 原子能出版社, 1980年。
 [6] 史永谦等, Rossi- α 法测量动态参数的研究, 同上, 114页。
 [7] 李茂季等, 高浓铀重水堆零功率堆活性区和部分实验, 内部资料, 1980年。
 [8] 赵郁森等, 脉冲源法测量次临界度, 内部资料, 1980年。
 [9] 赵郁森等, 内生脉冲源法测量次临界度, 内部资料, 1980年。
 [10] J. A. Rawlins, Nucl. Sci. Eng., 65, 555(1978).

(编辑部收到日期: 1981年7月31日)

(上接第 541 页)

从图 3 和图 4 可以看到, 在我们所讨论的范围内, 边缘角 α 和 β 随 L/R 的增加单调地减小, 而束流包络值 x_0 和 y_0 却随 L/R 的增加而直线增加, 发散角则随 L/R 的增加而减小。因为漂移距离大, 导致包络增大, 同时由于相体积守恒, 导致发散角减小。为了兼顾系统的消色差要求、对称面上束流包络值尽可能小以及工程安装的经济方便, 发现当 $L/R=2$ 时的各项数据都较符合要求, 因此, 我们取 2 为设计值。

我们对 $R=1\text{ m}$, $L/R=2$, $\varphi=30^\circ$, $\psi=15^\circ$, $\alpha=21.42^\circ$, $\beta=24.08^\circ$ 的三块偏转磁铁所组成的系统, 在北京大学的束流模拟机上进行模拟计算, 结果显示该系统确能实现束流的双消色差, 达到预期的要求。

参 考 文 献

[1] S. Penner, Rev. Sci. Instrum., 32, 150(1961).
 [2] A. Septier (Ed.), Focusing of Charged Particles, Academic Press Inc., New York, 1967.
 [3] A. P. Benford, The Transport of Charged Particle Beams, E. & F. N. Spon Ltd., London, 1966.

(编辑部收到日期: 1981年2月23日)