

谐波垫补原理及其在加速器常规磁铁设计与磁场垫补中的应用

尹兆升, 孙献静, 杨梅, 陈宛

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100049)

摘要: 加速器常规磁铁磁场质量评估通常表示为工作气隙好场区内高阶磁场占主磁场的相对含量, 它通常要求在 10^{-4} 量级内。这些高阶磁场来源于磁极的有限长度与宽度和极面设计参数选择产生的若干过大的系统高阶磁场偏差及加工与材料的不理想等因素产生的若干过大的随机高阶磁场偏差。这些偏差均会导致磁场质量变坏。谐波垫补法针对每个过大的高阶磁场利用磁极形位改变对磁场的扰动效应产生一与现存过大高阶磁场大小相当但符号相反的高阶磁场, 用来抵消现存的过大的高阶磁场, 达到根本改善磁场质量的目的。本文分析了谐波垫补原理, 并具体分析了它们在二极磁铁和四极磁铁设计与磁场垫补中的应用。

关键词: 常规加速器磁铁; 高阶磁场偏差; 谐波垫补

中图分类号: TL503.8

文献标志码: A

文章编号: 1000-6931(2013)02-0277-10

doi: 10.7538/yzk.2013.47.02.0277

Principle of Harmonic Shim and Application for Conventional Accelerator Magnets

YIN Zhao-sheng, SUN Xian-jing, YANG Mei, CHEN Wan

(*Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

Abstract: The harmonic field errors are an evaluation criterion for field quality of accelerator magnets. The limited magnetic pole width and length of conventional magnets will lead to systemic multipole errors. Also the tolerances of machining and material will bring on random multipole errors. Those multipole errors cause the field quality to be bad. The harmonic shims can counteract each multipole error through the change of pole profile, and it improves the field quality radically. The principle of the harmonic shims was analysed and its applications for dipole and quadrupole magnet were discussed in detail.

Key words: conventional accelerator magnet; multipole field error; harmonic shim

加速器常规磁铁为铁心主导型的电磁铁, 其磁场性能主要取决于磁极形状与铁心端部

结构。有限的磁极长度与宽度及极面参数的选择导致在磁铁工作气隙内产生若干较大的

系统高阶磁场偏差。加工误差、材料特性不理想等因素也会导致产生若干随机的过大高阶磁场。若这些高阶磁场超过要求的允许值,应予以减小或消除。谐波垫补法针对每个过大的高阶磁场,利用磁极形位改变对磁场的扰动效应,产生一与现存过大高阶磁场大小相当但符号相反的高阶磁场,用来抵消现存的每个过大的高阶磁场,达到改善磁场质量的目的。本文将分析谐波垫补原理,并具体分析它们在二极磁铁和四极磁铁设计与磁场垫补中的应用。

1 谐波垫补原理

谐波垫补原理是基于磁极形位改变与高阶磁场产生的磁场分析^[1-2]。在二维坐标下,由矢量磁势 \mathbf{A} 和标量磁势 V 组成复磁势 $\mathbf{F} = \mathbf{A} + iV$, 其多项式展开可表述为 $\mathbf{F} = \sum C_n z^n = \sum \frac{b_n}{n!} \cdot (x + iy)^n$, 式中每个 n 阶项组各代表 1 种强度幅值为 b_n 的 $2n$ 极磁场形态,其复磁势可表述为:

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{A}_n + iV_n = \frac{(b_{n1} + ib_{n2})}{n!} (x + iy)^n \quad (1)$$

式中: $2n$ 极磁场 b_n 的 2 个分量分别为垂直 $2n$ 极磁场 b_{n1} 和斜 $2n$ 极磁场 b_{n2} ; $2n$ 极磁场的标量磁势 V_n 为式(1)的虚部,即 $V_n = \frac{b_n}{n!} \text{Im}[(x + iy)^n]$ 。

加速器常规磁铁为铁心主导型的电磁铁。1 台垂直 $2N$ 极磁铁,其主磁场阶数 $n = N$, 主磁场为 b_{N1} 。由于铁心内磁导率远比气隙的高,铁心极面上标量磁势可看作等势面,即 $V_{N\text{极面}} = \text{常数}$ 。若依照谐波垫补的需要,在 $2N$ 极磁铁的主磁场中产生一 $2n$ 极高阶磁场(n 阶磁场)时,则磁极气隙内磁势可表达为 $V = V_N + V_n$ 。而在极面上的磁势仍为 $V_{N\text{极面}} = \text{常数}$ 。因此,在 $2N$ 极主磁场中产生含有 $2n$ 极高阶磁场的极面方程可表达为:

$$V_N + V_n = V_{N\text{极面}} \quad (2)$$

通常,高阶磁场与主磁场的比值 b_n/b_N 很小,因此,式(2)给出的新极面方程可看作是对 $2N$ 极磁铁理想极面的 1 个扰动。应用这个扰动效应,使新极面能在主磁场 V_N 中产生一恰当大小的 $2n$ 极磁场 V_n , 用来抵消现存的与之符号相反的过大 $2n$ 极磁场。

由于磁铁的积分磁场性能是决定其磁场质量好坏的主要指标,因此,需通过积分磁势的谐波分析得出积分磁场的谐波垫补方法。积分磁势是在二维磁势分析的基础上引伸到对长度积分得出的。1 台磁长度为 L 的垂直 $2N$ 极磁铁,若其主磁场二维磁势为 V_{Nn} , 则主磁场的积分磁势可表述为 $V_{Nn}L$ 。积分磁场垫补是在维持磁极的截面形状不变的前提下在铁心两个端部进行的。因此,要在端部产生一局部的 $2n$ 极磁场,则需改变不同极面位置处的铁心长度(即对于极面长度 L 的一扰动)。端部垫补后的铁心长度变为 $l_n(x, y)$ 。在这种情况下,铁心极面上的积分磁势面可表示为 $V_{N\text{极面}} l_n(x, y)$ 。显然,要在铁心端部产生一恰当的 $2n$ 极磁场,则要求 $l_n(x, y)$ 满足 $V_{N\text{极面}} l_n(x, y) = (V_{Nn} + V_n)L$, 或表示为:

$$l_n(x, y) = L + V_n L / V_{N\text{极面}} \quad (3)$$

通常,磁铁的两个端部同时进行端部垫补,每个端部垫补量为总垫补量的 $1/2$ 。每个端部产生 $2n$ 极磁场的垫补为 $\Delta l_n(x, y) = [l_n(x, y) - L]/2$, $\Delta l_n(x, y)$ 即为铁心在每个端部的垫补形状。它可在磁铁端部附加产生一恰当的 $2n$ 极磁场,用以抵消积分磁场中现存的与之符号相反的过大积分 $2n$ 极磁场。

2 二极磁铁谐波垫补分析及其在磁铁设计和磁场端部垫补中的应用

2.1 二维磁场谐波垫补分析

对于垂直二极磁铁, $N=1$ 。主磁场为垂直二极磁场 b_{11} , 其标量势可写成 $V_1(x, y) = b_{11}y$ 。若二极磁铁磁极半气隙高度为 y_0 , 极面上磁势为 $V_{1\text{极面}} = \pm b_{11}y_0$, 二极磁铁的基本极面方程为 $y = \pm y_0$ 的 1 组对称于中心平面的平行线。若在二极磁场中含有一 $2n$ 极高阶磁场(即 n 阶磁场)时,则工作气隙内的标量磁势为 $V = V_1 + V_n$, 极面上的磁势仍为 $\pm b_{11}y_0$ 。因此,在二极磁场中再产生一 $2n$ 极磁场的新极面方程需满足 $b_{11}y + V_n(x, y) = \pm b_{11}y_0$, 或表示为:

$$y + \frac{b_n}{b_{11}} \cdot \frac{\text{Im}[(x + iy)^n]}{n!} = \pm y_0 \quad (4)$$

上式表明,在二极磁场中产生一含有 $2n$ 极磁场的新极面是对平行极面 $y = \pm y_0$ 的一扰动,扰动的大小与 b_n/b_{11} 成正比。

为便于实际应用,需将式(4)中的 b_n/b_{1n} 转换成好场区半宽度 x_{ref} 处的高阶磁场与二极磁场的比值 B_n/B_1 , 即有 $\frac{B_n}{B_1} = \frac{b_n}{b_{1n}} x_{ref}^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$ 。考

虑到通常的实际需要,表 1 中列出几个二极中含有较低阶数的垂直高阶磁场 b_{mn} 的主要特征,其新极面图像示于图 1。

表 1 二极磁场中含有高阶磁场的主要特征

Table 1 Pole profile of dipole field with higher multipole

b_{mn}	$V_1 + V_n$ 的极面方程	零垫补点数量及方位(与磁极中轴线夹角)
b_{2n}	$y + \frac{b_{2n}}{b_{1n}}xy = \pm y_0$	1 个, 0°
b_{3n}	$y + \frac{b_{3n}}{b_{1n}} \cdot \frac{(3x^2y - y^3)}{3!} = \pm y_0$	2 个, $\pm\pi/6$
b_{4n}	$y + \frac{b_{4n}}{b_{1n}} \cdot \frac{(4x^3y - 4xy^3)}{4!} = \pm y_0$	3 个, $\pm\pi/4$
b_{5n}	$y + \frac{b_{5n}}{b_{1n}} \cdot \frac{(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)}{5!} = \pm y_0$	4 个, $\pm\pi/10, \pm 3\pi/10$
b_{7n}	$y + \frac{b_{7n}}{b_{1n}} \cdot \frac{(7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7)}{7!} = \pm y_0$	6 个, $\pm\pi/14, \pm 3\pi/14, \pm 5\pi/14$

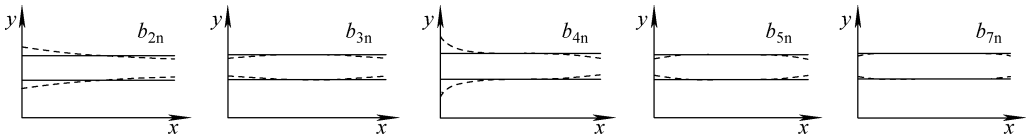


图 1 二极磁场中含有高阶磁场的新极面形状

Fig. 1 Shape of dipole field with higher multipole

分析可得出:1) 在主磁场 b_1 中产生含有某阶高阶磁场 b_n 的新极面是对平行线极面的一扰动。扰动的大小正比于此高阶磁场与主磁场的比值 b_n/b_1 ; 2) 新极面与平行极面存在若干个相交点称“零垫补点”, 在这里极面垫补量为零; 3) 每阶高阶磁场新极面零垫补点的方位是固定的, 与磁极孔径大小无关; 4) 新极面的一重要特性是在零垫补点之间极面所需垫补量很小, 而在零垫补点之外所需垫补量逐渐增大; 5) 二极磁铁含有系统高阶磁场, 如六极磁场 b_{3n} 、十极磁场 b_{5n} 等, 它的新极面垫补形状具有 4 个象限的完全对称性, 而非系统高阶磁场的极面垫补则是不完全对称或不

对称的。
二维磁场谐波垫补分析对二极磁铁极面设计有着重要指导意义。有限宽度的平行极面在无极面垫补的情况下断开, 在主二极磁场中将产生一负的六极磁场和一负的十极磁场等高阶磁场。这些高阶磁场的大小取决于极面气隙高度和断开点的位置(图 2)。

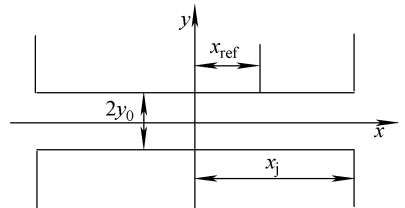


图 2 二极磁铁断开点的位置

Fig. 2 Position of cut point of dipole field

表 2 列出一典型二极磁铁不同的断开点位置 x_j 下在好场区半宽度 $x_{ref} = 1.5y_0$ 处产生的高阶磁场的 OPERA 程序计算结果。

表 2 二极磁铁不同断开点位置产生的高阶磁场

Table 2 Multipole errors of dipole magnet caused by different x_j

x_j/x_{ref}	B_3/B_1	B_5/B_1	B_7/B_1
1.37	-8.3×10^{-4}	-6.85×10^{-4}	-7.04×10^{-4}
2	-2.88×10^{-5}	-1.33×10^{-5}	-1.41×10^{-5}
3	-8.16×10^{-7}	-3.20×10^{-7}	-4.19×10^{-8}

若要保证场区 $x_{\text{ref}} = 1.5y_0$ 内高阶磁场含量在 10^{-4} 左右,在无极面垫补的情况下,极面断开点的位置应在 $2.5y_0$ 以上。采用谐波垫补法进行极面垫补,可在减小极面宽度的情况下有效抵消由极面断开产生的 B_3/B_1 和 B_5/B_1 等过大的高阶磁场。谐波垫补的任务是针对每个过大高阶磁场产生一与之大小相当但符号相反的高阶磁场。同时产生 B_3/B_1 和 B_5/B_1 的极面垫补为 $y + \frac{b_{3n}}{b_{1n}} \cdot \frac{(3x^2y - y^3)}{3!} + \frac{b_{5n}}{b_{1n}} \cdot \frac{(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)}{5!} = \pm y_0$, 其图像如图 3a 所示。从计算得出的谐波垫补新极面图像可知:

1) 新极面图像可清楚显示进行极面垫补的合适方位,垫补六极磁场 B_5 应在其零垫补点 $x = \pm 0.5774y_0$ 以外进行,垫补十极磁场 B_3 应在其零垫补点 $x = \pm 1.3764y_0$ 以外进行,垫补位置不当将不会获得良好结果,甚至产生新的不期望的高阶磁场。

2) 新极面图像可清楚显示合适的极面垫补形状,从图 3a 给出的抵消 B_3/B_1 和 B_5/B_1 等高阶磁场角度的垫补图像看,简单有效的极面垫补形状应是 1 组恰当高度的扁三角形(图 3b)。但扁三角形的极面垫补在磁极两侧拐角形成尖角将导致磁场局部饱和的发生,影响磁场质量。因此,一个合适的梯形极面垫补(图 3c)成为最佳选择。梯形极面垫补与扁三角形垫补相比,不仅同样有效减小过大高阶磁场,且梯形极面垫补可较好地减小磁极边缘磁场局部饱和,并易于保证极面加工精度。需说明的是,图 3a 给出的垫补图像未考虑极面断开的影响,所以实际垫补形状应比计算垫补厚。

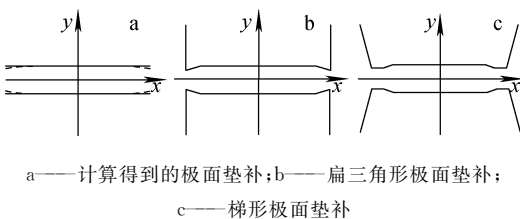


图 3 二极磁铁的极面垫补形状

Fig. 3 Pole profile shims for dipole magnet

2.2 积分磁势谐波垫补分析

根据式(3)对积分磁势谐波垫补分析,对垂

直二极磁铁有 $N=1$ 。若它的磁长度为 L ,磁极气隙半高度为 y_0 ,则主二极磁场的积分磁势为 $\pm b_{1n}y_0L$ 。要在二极磁铁端部产生一局部 $2n$ 极高阶磁场,在磁极截面形状不变(即保持 $y = \pm y_0$)的前提下,则需改变极面长度。取新的极面长度为 $l_n(x)$,在极面上的积分磁势为 $\pm b_{1n}y_0l_n(x)$ 。因此,产生局部 $2n$ 极高阶磁场要求新极面长度 $l_n(x)$ 必须满足 $[b_{1n}y + V_n(x, y)]L = \pm b_{1n}y_0l_n(x)$,或满足以下方程:

$$l_n(x, y) = \frac{b_{1n}y + V_n L}{b_{1n}y_0} L = L + \frac{b_n}{b_{1n}} \cdot \frac{\text{Im}[(x + iy)^n]}{y_0 n!} L \quad (5)$$

此处 $l_n(x)$ 即为在二极磁铁端部产生 $2n$ 极高阶磁场所需的积分磁场垫补形状,它是对铁心极面长度 L 的 1 个扰动。

通常情况下,磁铁需在两个端部都进行垫补,取每个端部的垫补量 Δl_n 为总垫补量的 $1/2$,即 $\Delta l_n(x) = (l_n(x) - L)/2$ 。 $\Delta l_n > 0$,铁心在 L 基础上增加极面长度,称为正垫补; $\Delta l_n < 0$,铁心在 L 基础上减少极面长度,称为负垫补。 $\Delta l_n = 0$ (即 $l_n = L$)处称为零垫补点。实际上,经常是根据在好场区半宽度 x_{ref} 处过大高阶磁场与主磁场之比 B_n/B_1 进行端部垫补。考虑到 B_n/B_1 与 b_n/b_1 的关系,将其代入式(5),可根据 x_{ref} 处产生 B_n/B_1 的需要得出二极磁铁端部的垫补形状。表 3 列出了二极磁铁端部在 x_{ref} 处产生较低阶垂直 $2n$ 极高阶磁场 B_n 的端部垫补,其形状如图 4 所示。

表 3 二极磁铁端部产生 $2n$ 极磁场的端部垫补

Table 3 Shim of dipole magnet to produce a $2n$ -pole field at magnet ends

高阶 磁场	每侧端部垫补	零垫补点位置
B_{2n}	$\Delta l_{2n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{2n}}{B_{1n}} \cdot \frac{x}{x_{\text{ref}}}$	$x=0$
B_{3n}	$\Delta l_{3n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{3n}}{B_{1n}} \cdot \frac{3x^2 - y_0^2}{6x_{\text{ref}}^2}$	$x = \pm y_0 \sqrt{3}$
B_{4n}	$\Delta l_{4n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{4n}}{B_{1n}} \cdot \frac{x^3 - xy_0^2}{x_0^3}$	$x=0, \pm y_0$
B_{5n}	$\Delta l_{5n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{5n}}{B_{1n}} \cdot \frac{5x^4 - 10x^2y_0^2 + y_0^4}{5x_0^4}$	$x = \pm 0.3249y_0, \pm 1.3764y_0$

由积分磁场垫补分析可得出:1) 在二极磁铁端部产生某阶高阶磁场 b_n 的新垫补形状是

对铁心长度平行截止的一扰动,扰动量的大小正比于此高阶磁场与主磁场的比值 B_n/B_1 。
 2) 端部垫补的零垫补点方位与二维磁场极面垫补零垫补点相同。端部垫补量 Δl_n 在零垫补点之间很小,而在零垫补点之外逐渐增大。
 3) 若端部垫补产生二极磁铁的系统高阶磁场

(如垂直六极磁场、十极磁场等),则其端部垫补形状也是左右对称的;而产生非系统高阶磁场(如四极磁场、八极磁场等)均存在一 $x=0$ 的零垫补点,则其垫补形状是左右反对称的;若产生斜的 $2n$ 极磁场,则其端部垫补形状则是不对称的。

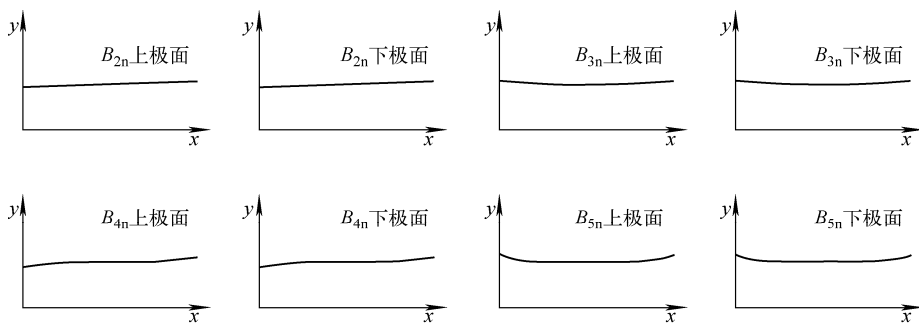


图4 二极磁铁端面垫补形状
 Fig.4 Shim shape of dipole magnet

积分磁场谐波垫补分析在二极磁铁磁场端部削斜与垫补中有着重要指导意义。二极磁铁端部削斜的主要目的有两个:一是减小由于端部效应和磁铁工艺不完善等原因产生的过大的高阶磁场;二是减小端部截止处铁心磁场的局部饱和。通常,二极磁铁的端部效应主要在磁铁端部产生1个 10^{-3} 量级的负六极磁场及其他一些高阶磁场。不同的二维极面垫补也可能会改变积分磁场中高阶磁场含量,但起主导作用的是二极磁铁端部效应产生的过大负六极磁场。端部垫补主要是抵消这个负六极磁场。由表2得出,产生一正的六极磁场的端部垫补是一关于磁极轴线对称的二次曲线 $\Delta l_{3n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{3n}}{B_{1n}} \cdot \frac{3x^2 - y_0^2}{6x_0^2}$ 。若端部垫补采用端部削斜方式,要考虑削斜角度对磁场垫补效率的影响。图5为二极磁铁典型的端部削斜形状。采用 45° 的削斜角度。端部削斜包括抵消过大负六极磁场需要的二次曲线削斜和避免端部磁极局部饱和的通体削斜。

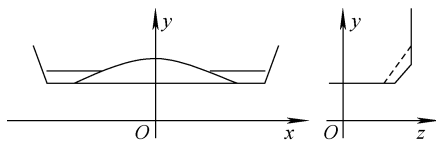


图5 二极磁铁典型的端部削斜形状
 Fig.5 Typical end-chamfer for dipole magnets

考虑到积分磁场其他高阶磁场的消除,在多数情况下十极磁场为正。如 BEPC II 存储环弯转磁铁 67B^[3] 在端部削斜前积分磁场中的含量分别是六极磁场为 -1.78×10^{-3} 、十极磁场

为 5.33×10^{-4} 、十四极磁场为 -3.93×10^{-4} 。同时抵消六极、十极和十四极磁场则有 $\Delta l = \Delta l_{3n} + \Delta l_{5n} + \Delta l_{7n}$ 。由于其中以六极磁场为主,端部削斜计算得到的端部削斜曲线基本上近似为二次曲线。需注意,为有效进行端部垫补,端部垫补宽度需大于被抵消的高阶磁场最外的零垫补点之间的距离。垫补六极、十极和十四极磁场的零垫补点的 x 坐标分别位于 $\pm 0.577 4y_0$ 、 $\pm 1.376 4y_0$ 和 $\pm 2.076 5y_0$ 处,因此,端部削斜的宽度至少大于 $\pm 2y_0$ 。67B 磁铁最后的端部削斜曲线如图6所示。若待消除的磁场含有四极磁场,它在 $x=0$ 处有一零垫补点,可在磁铁垫补极面的两边作适当的不等量的削斜即可。由于端部削斜是一负垫补。因此,端部削斜后磁铁的有效长度将在一定程度上减小。实验研究表明,谐波垫补法可有效减小各过大高阶磁场含量。67B 磁铁在端部削斜后的高阶磁场积分含量分别是四极磁场为

-7.49×10^{-5} , 六极磁场为 1.11×10^{-4} , 十极磁场为 1.93×10^{-4} 。

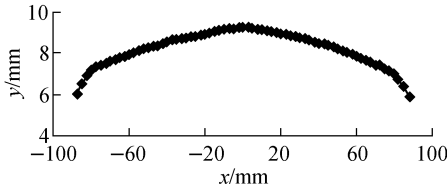


图6 BEPC II 存储环弯转磁铁 67B 的端部削斜曲线
Fig. 6 End chamfer for BEPC II storage ring dipole 67B

3 四极磁铁谐波垫补分析及其在磁铁设计和磁场端部垫补中的应用

3.1 二维磁场谐波垫补分析^[4-5]

根据式(2)的分析,对于孔半径为R的垂

直四极磁铁有 $N=2$, 主磁场为 b_{2n} (即中心磁场梯度 G_0), 主磁场的标量势可写成 $V_2(x, y) = b_{2N}xy$, 极面的等磁势面为 $V_{2\text{极面}} = \pm b_{2N}R^2/2$ 。因此,四极磁铁的基本极面方程为 $xy = \pm R^2/2$ 。它是1组4个象限完全对称的双曲线,磁极的中轴线为 $\pm 45^\circ$ 线。若在四极磁场 b_{2n} 中含有一高阶磁场 b_n , 它的磁势为 $V(x, y) = V_2(x, y) + V_n(x, y)$, 而在极面上的磁势仍为 $\pm b_{2n}R^2/2$ 。因此,四极磁场中产生 $-2n$ 极磁场的新极面方程需满足 $b_{2n}xy + V_n(x, y) = \pm b_{2n}R^2/2$, 即:

$$xy + \frac{b_n}{b_{2n}} \cdot \frac{\text{Im}[(x + iy)^n]}{n!} = \pm \frac{R^2}{2} \quad (6)$$

由上式可见,含 $2n$ 极磁场的新极面方程是对双曲线极面的一扰动,扰动量的大小正比于 b_n/b_{2n} 。表4按通常所需列出了四极磁铁含高阶磁场的主要特征,其极面形状如图7所示。

表4 四极磁场含有高阶磁场的极面特征

Table 4 Pole profile of quadrupole field with higher multipole

b_{2n}	产生 $V_2 + V_n$ 的极面方程	零垫补点
b_{3n}	$xy + (b_{3n}/b_{2n})(3x^2y - y^3)/3! = \pm R^2/2$	$\pi/12$
b_{4n}	$xy + (b_{4n}/b_{2n})(4x^3y - 4xy^3)/4! = \pm R^2/2$	0
b_{5n}	$xy + (b_{5n}/b_{2n})(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)/5! = \pm R^2/2$	$-\pi/20, 3\pi/20$
b_{6n}	$xy + (b_{6n}/b_{2n})(6x^5y - 20x^3y^3 - 6xy^5)/6! = \pm R^2/2$	$\pm \pi/12$
b_{10n}	$xy + (b_{10n}/b_{2n})(10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9)/10! = \pm R^2/2$	$\pm \pi/20, \pm 3\pi/20$
b_{14n}	$xy + (b_{14n}/b_{2n})(14x^{13}y - 364x^{11}y^3 + 2002x^9y^5 - 3432x^7y^7 + 2002x^5y^9 - 364x^3y^{11} + 14xy^{13})/14! = \pm R^2/2$	$\pm \pi/28, \pm 3\pi/28, \pm 5\pi/28$

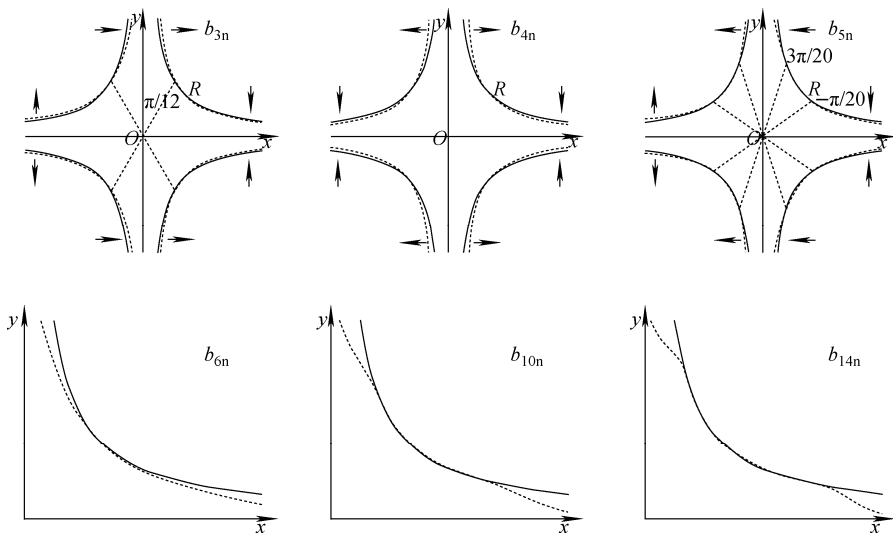


图7 四极磁场中含有高阶磁场的新极面形状

Fig. 7 Shape of quadrupole field with higher multipole

分析表 4 可知:1) 主四极磁场 b_2 中含有某阶高阶磁场 b_n 的极面是对双曲线极面的扰动, 扰动量的大小正比于高阶磁场与主磁场的比值 b_n/b_2 ; 2) 新极面与双曲线极面的交点为零垫补点, 每阶高阶磁场零垫补点与磁极中轴线的夹角是固定的, 它与磁极孔径大小无关; 3) 在零垫补点之间这种扰动量很小, 而在零垫补点之外扰动量逐渐增大; 4) 若四极磁场中含有的高阶磁场为系统高阶磁场, 如 b_{6n}, b_{10n} 等, 它的极面垫补形状具有 4 个象限的完全对称性。含有非系统高阶磁场的极面则是不完全对称的或不对称的。

二维磁场谐波垫补分析在四极磁铁极面设计中有着重要指导意义。有限宽度的双曲线极面在无极面垫补的情况下断开将在主四极磁场中产生一负的十二极磁场和一负的二十极磁场等高阶磁场。这些高阶磁场的大小取决于极面断开点的位置。表 5 给出 1 个 4 个象限完全对称的孔半径为 R 的典型四极结构在不同断开点位置 x_j 的情况下(图 8), 在好场区半径 $R_{ref} = 0.8R$ 处产生的高阶磁场的 OPERA 程序数值计算结果。可见, 要保证 $R_{ref} = 0.8R$ 内高阶磁场含量在 10^{-4} 时, 在无极面垫补的情况下, 极面断开点的位置应在 $1.8R_{ref}$ 以上。

表 5 四极磁铁不同的断开点位置产生的高阶磁场
Table 5 Multipole errors of quadrupole magnet at $R_{ref} = R_0$ caused by different x_j

x_j/R_{ref}	B_6/B_2	B_{10}/B_2	B_{14}/B_2
1.0	-7.66×10^{-2}	-2.70×10^{-3}	3.42×10^{-3}
1.4	-9.76×10^{-3}	-9.02×10^{-4}	-1.05×10^{-4}
1.8	2.133×10^{-5}	-2.01×10^{-5}	-4.97×10^{-6}

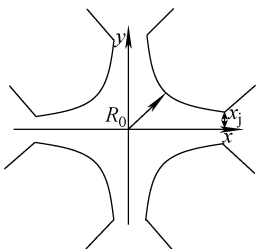


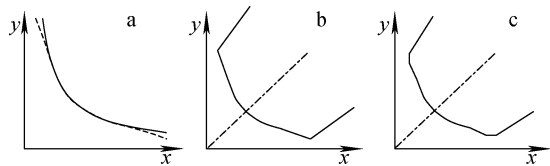
图 8 四极磁铁断开点的位置

Fig. 8 Position of cut point of quadrupole field

应用谐波垫补法进行极面垫补, 可在减小极面宽度的情况下有效抵消由极面断开产生

的过大的高阶磁场。参考表 5 给出的在断开点位置 $x_j = 1.4R_{ref}$ 处产生的高阶磁场, 按照表 4 分析的极面垫补可抵消这些过大高阶磁场, 达到从根本上改善磁场的目的。在利用表 4 求解极面垫补形状时, 首先需利用 $\frac{b_n}{b_2} = \frac{B_n}{B_2} \cdot \frac{(n-1)!}{R_{ref}^{n-2}}$ 的关系式将 R_{ref} 处的 B_n/B_2 转换为 b_n/b_2 。同时, 垫补 b_6 和 b_{10} 的新极面方程应为 $xy + \frac{b_{6n}}{b_{2n}} \cdot \frac{6x^5y - 20x^3y^3 - 6xy^5}{6!} + \frac{b_{10n}}{b_{2n}} \cdot \frac{10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9}{10!} =$

$\pm \frac{R^2}{2}$, 它的图像如图 9a 所示。谐波垫补新极面给出两个重要提示。其一是新极面图像可清楚地显示出进行极面垫补的合适方位。有效垫补方位应该取在高阶磁场零垫补点以外。例如, 垫补 B_6/B_2 应取在其零垫补点 $x = 0.9306R$ 以外, 垫补 B_{10}/B_2 应在其零垫补点 $x = 1.241R$ 以外。垫补位置不当将不会获得良好结果。其二是新极面可清楚地显示合适的极面垫补形状。显然, 从抵消 B_6/B_2 和 B_{10}/B_2 等高阶磁场角度看, 四极磁铁极面垫补应是在合适的双曲线极位置上垫补 1 组简化的扁三角形垫补, 如图 9b 所示。不过扁三角形的极面垫补将在磁极两侧拐角形成尖角, 将导致磁场局部饱和的发生, 影响磁场质量。因此, 1 个合适的准梯形极面垫补(图 9c)成为最佳选择。梯形极面垫补与扁三角形垫补相比, 不仅同样可有效减小高阶磁场, 且可减小磁极边缘磁场局部饱和。若梯形底边平行于中心平面, 还可用作铁心叠装的辅助基准面, 也易于保证铁心极面加工精度。同样需说明, 图 9a 给出的垫补图像未考虑极面断开的影响, 所以, 实际垫补形状应比计算垫补厚。



a——计算的极面垫补; b——准扁三角形极面垫补; c——准梯形极面垫补

图 9 四极磁铁的极面垫补形状

Fig. 9 Pole profile shims for quadrupole magnet

谐波垫补分析还可用于铁心回轭间隙的垫补。当磁铁制造完成后发现含有过大高阶磁场时,可根据表 4 的谐波垫补原理采用调整铁心回轭间隙的方法减小过大高阶磁场,从而可挽

救一批质量未达标产品。回轭间隙垫补量将很小,约几或十几 μm ,不会给磁铁励磁及结构稳定性带来很大影响。表 6 列举了四极磁铁消除某些过大高阶磁场的回轭间隙垫补法。

表 6 四极磁铁回轭间隙磁场垫补方法

Table 6 Core shim methods for quadrupole magnets

被消除的高阶磁场	铁心回轭间隙垫补方位及垫补方法			
	-x 轴回轭间隙	+x 轴回轭间隙	-y 轴回轭间隙	+y 轴回轭间隙
$+b_{3n}(-b_{3n})$	减小(加大)	加大(减小)		
$+b_{3s}(-b_{3s})$			加大(减小)	减小(加大)
$+b_{4n}$	与+x一起加大	与-x一起加大	与+y一起减小	与-y一起减小
$-b_{4n}$	与+x一起减小	与-x一起减小	与+y一起加大	与-y一起加大
$+b_{4s}$	与-y一起减小	与+y一起加大	与-x一起减小	与+x一起加大
$-b_{4s}$	与-y一起加大	与+y一起减小	与-x一起加大	与+x一起减小
$+b_{5n}$	第 1,3 象限磁极向外移动		第 2,4 象限磁极向内移动	
$-b_{5n}$	第 1,3 象限磁极向内移动		第 2,4 象限磁极向外移动	
$+b_{5s}$	第 1,2 象限磁极向外移动		第 3,4 象限磁极向内移动	
$-b_{5s}$	第 1,2 象限磁极向内移动		第 3,4 象限磁极向外移动	

3.2 积分磁势谐波垫补分析^[6]

根据式(3)的积分磁势分析,对于四极磁铁,有 $N=2$ 。若四极磁铁孔半径为 R 且磁长度为 L ,主四极磁场的积分磁势可写为 $b_{2n}xyL$ 。要在保持四极磁铁双曲线极面形状不变的情况下在磁铁端部产生一局部 $2n$ 极磁场,则需改变铁心极面的长度。若改变后的极面长度表示为 $l_n(x,y)$,则在极面上的积分磁势可表示为 $\pm l_n(x,y)b_{2n}R^2/2$ 。显然, $l_n(x,y)$ 与 L 的差即为在端部产生 $2n$ 极磁场的垫补形状。通常,磁铁在两个端部都要进行垫补,每个端部的垫补量被定义为总垫补量的 $1/2$,即 $\Delta l = [l(x,y) - L]/2$ 。为抵消现存的过大 $2n$ 极磁场,磁铁端部垫补需产生一与之相反的大小相当的局部 $2n$ 极磁场。这时的端部垫补 $l_n(x,y)$ 要满足垫补后的积分磁势,即 $b_{2n}xy l_n(x,y) = (b_{2n}xy + V_n) L$ 。磁铁每个端部的垫补 Δl 为总垫补量的 $1/2$,则有:

$$\Delta l_n(x,y) = \frac{L}{2} \cdot \frac{V_n}{b_{2n}xy} = \frac{L}{R^2} \cdot \frac{b_n}{b_2} \cdot \frac{\text{Im}[(x+iy)^n]}{n!} \quad (7)$$

考虑到四极磁铁通常是按照所需的参考半

径 R_{ref} 处的 B_n/B_2 来进行端部垫补估算的,可将关系式 $\frac{b_n}{b_2} = \frac{B_n}{B_2} \cdot \frac{(n-1)!}{R_{\text{ref}}^{n-2}}$ 代入式(7),得出产生一大小相当符号相反的四极磁铁端部的垫补形状。图 10 和表 7 给出了常用的四极磁铁在参考半径 R_{ref} 处产生较低阶的系统高阶磁场 B_{6n} 和 B_{10n} 的垫补特性。表 7 中,为方便显示 $\Delta l_n(x,y)$ 图像且便于端部垫补的实际加工,将 (x,y) 坐标以原点为中心旋转 45° ,转换为新坐标系 (x_2, y_2) 。在 (x_2, y_2) 坐标系中四极磁铁双曲线极面方程变成为 $x_2^2 - y_2^2 = \pm R^2$,磁极的中轴线与 y_2 轴重合。根据式(7),也可得出四极磁铁在端部产生任何所需的 $2n$ 极磁场的端部垫补的表达式。只不过它们的形状不是 4 个象限完全对称的,需更复杂的形状。

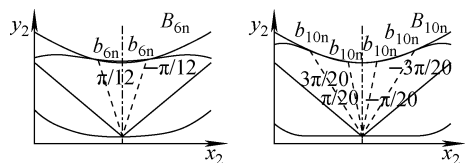


图 10 四极磁铁端部垫补形状

Fig. 10 Shim shape of quadrupole magnet

表 7 四极磁铁产生 B_{6n} 和 B_{10n} 的端部垫补

Table 7 End shim shape of quadrupole magnet to produce B_{6n} and B_{10n}

高阶磁场	产生 $V_2 + V_n$ 的端部垫补	零垫补点数量及其与中轴线夹角
B_{6n}	$\Delta l_{6n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{6n}}{B_{2n}} \cdot \frac{1}{R_{ref}^3} \cdot \frac{6x^4 - 5R^4 + 6y^4}{6}$	2 个, $\pm 15^\circ (\pm \pi/12)$
B_{10n}	$\Delta l_{10n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{10n}}{B_{2n}} \cdot \frac{1}{R_{ref}^8} \left(x^8 - 3R^4 x^4 + \frac{63}{40} R^8 - 3R^4 y^4 + y^8 \right)$	4 个, $\pm 9^\circ (\pm \pi/20), \pm 27^\circ (\pm 3\pi/20)$

由上述分析可得出:1) 四极磁铁端部产生某个高阶磁场的端部垫补是对磁极极面长度的扰动,扰动量的大小正比于高阶磁场的相对含量 B_n/B_2 ; 2) 产生 B_{6n} 、 B_{10n} 等系统高阶磁场的端部垫补具有 4 个象限的完全对称性; 3) 在零垫补点之间的端部垫补量 Δl 很小,而在零垫补点之外垫补量逐渐加大。这表明,有效的端部垫补应该在零垫补点以外的地方进行。

积分磁场谐波垫补分析在四极磁铁磁场端部削斜与垫补中有重要指导意义。四极磁铁端部削斜的主要目的是减少四极磁铁端部效应对磁铁积分磁场质量造成的损害,同时减小端部铁心局部饱和。四极磁铁端部效应主要是在磁铁端部产生 10^{-3} 量级的负十二极磁场和一些其他高阶磁场。端部垫补的任务是在端部产生一局部的以正十二极磁场为主的高阶磁场,用以抵消以负十二极磁场为主的过大的高阶磁场,达到从根本上改善磁铁的积分磁场性能的目的。

由于四极磁铁端部垫补大多采用端部削斜的垫补形式。端部削斜兼顾了产生需要的局部高阶磁场以抵消过大的高阶磁场且可减小端部磁极局部饱和程度。因此,这里主要讨论积分磁场谐波垫补分析在端部削斜中的应用。根据表 7 中给出的分析,磁铁端部产生 B_{6n} 的垫补图像为 $\Delta l_{6n} = \frac{L}{2} \cdot \frac{B_{6n}}{B_{2n}} \cdot \frac{1}{R_{ref}^3} \cdot \frac{6x^4 - 5R^4 + 6y^4}{6}$, 它是 x 的 4 次曲线。若需要产生 B_{10n} , 它的垫补图像则是 x 的 8 次曲线。它们给出的端部垫补形状将是复杂和难于加工的。采用图 11 的端部简单削斜可很好地符合端部垫补的需要。由于双曲线极面为 x 的 2 次曲线,而简单的端部削斜是在 2 次曲线基础上的削斜,削斜后的端部垫补形状则是一相近的 4 次曲线。通常的端部削斜可用 3 个主要参数表达,即削斜深度、削斜宽度和削斜仰角。削斜深度主要取决于需要产生的局部高阶磁场强度

B_n/B_2 , 也与铁心长度和孔径大小有关。削斜宽度在正常情况应大于其最大的零垫补点之间的距离,以便得到良好的削斜效果。若要同时消减 B_{6n} 和 B_{10n} , 端部削斜范围应大于 B_{10n} 的零垫补点 $\pm 0.592 1R (\pm 3\pi/20)$ 。削斜仰角与削斜产生局部高阶磁场的效率有关,削斜仰角越大效率越大。最大削斜角仰角为 90° , 削斜角为零则无削斜。实际上,削斜深度、削斜宽度与削斜仰角不是独立的。削斜仰角不仅要考虑产生局部高阶磁场效率的需要,还要兼顾减小端部磁场局部饱和的需要。在谐波垫补指导下,使用三维磁场计算程序可验证和优化消减过大高阶磁场所需的端部削斜形状。

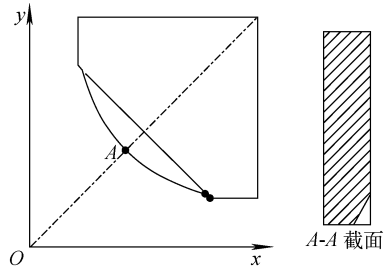


图 11 四极磁铁端部的简单削斜

Fig. 11 Simple end chamfer of quadrupole magnet

四极磁铁的端部效应除产生负十二极磁场外还可能产生其他高阶磁场。二维极面垫补也可改变积分磁场的谐波含量。在多数情况下,端部削斜前四极磁铁积分磁场中含有正的二十极磁场。作为谐波垫补法应用的实例,在 BEPC-II 对撞区双孔径四极磁铁 Q1a 和 Q1b 的研制中探索了端部削斜的最佳形状。图 12 为测量得到的 Q1a 磁铁端部削斜深度与十二极磁场 B_{6n} 和二十极磁场 B_{10n} 的关系曲线。实验结果表明,削斜深度与十二极磁场的关系比较敏感,十二极磁场与削斜深度关系是上升的曲线;而对于二十极磁场不很敏感,二十极磁场

则是先下降后上升的。这是由它们的零垫补点具有不同的方位和数量而决定的。表7的垫补图像表明,在磁极顶部 B_{6n} 和 B_{10n} 的垫补符号相反,在削斜宽度大于 B_{10n} 的零垫补点后垫补 B_{6n} 和 B_{10n} 同号。因此,选择合宜的削斜深度和削斜角度,采用简单的端部削斜,完全可达到同时减小 B_{6n} 和 B_{10n} 的目的。图12的实验结果表明,Q1a在削斜深度为7 mm、削斜角为 57° 时, B_{6n} 与 B_{10n} 同时为最小。因此,Q1a的最佳端部削斜形状为 $7 \times 57^\circ$ 。在此种端部削斜下,十二极磁场 B_6/B_2 从 6.6×10^{-3} 减小到 5×10^{-4} ,同时二十极磁场 B_{10}/B_2 从 9.5×10^{-4} 减小到 2×10^{-4} 。

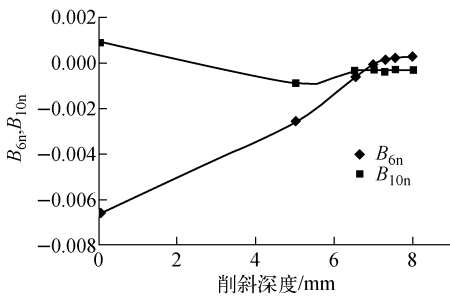


图12 Q1a 削斜深度与 B_{6n} 、 B_{10n} 关系曲线

Fig. 12 Curve of B_{6n} and B_{10n} vs chamfer depth for Q1a

作为端部削斜效果的验证,采用短旋转线圈测量Q1b磁铁端部削斜后测量得到的十二极磁场和二十极磁场沿磁铁纵向的分布,结果如图13所示。可见磁铁两端的端部削斜形成的正十二极磁场很好抵消了削斜前端部效应形成的负十二极磁场。

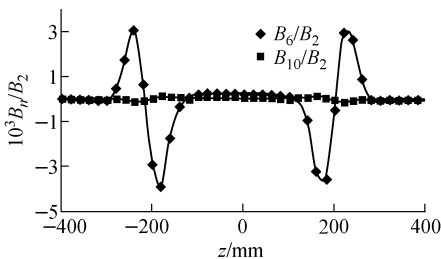


图13 Q1b 端部削斜后测量得到的十二极磁场和二十极磁场沿磁铁纵向的分布

Fig. 13 Field distribution of the 12-pole and 20-pole after end chamfer in Q1b

端部削斜通常采用松弛逼近方式,不必一步到位。第1步是削斜到需要的70%~90%。一般这一步并未削斜到位,但十二极磁场在减小而它的符号(即相位)未改变。若十二极磁场的符号改变,则削斜深度过量。第2步是根据第1步测量得到的结果给出下次削斜量,大多数情况下均能使十二极和二十极磁场减小到要求值以下。若仍未削斜到位且相位未改变,还可继续第3次削斜。

4 结语

谐波垫补法是一有针对性地减小任何过大高阶磁场的磁场垫补方法,可从根本上改善磁铁的磁场质量。谐波垫补法不仅可应用在加速器常规磁铁高精度的磁场垫补,且可应用于高分辨率分析磁铁以及核磁共振磁铁等高精度磁场的垫补。

参考文献:

- [1] TANABE J. Iron dominated electromagnets design, fabrication, assembly and measurements, SLAC-R-754 [R]. Stanford: Stanford Linear Accelerator Center, Stanford Synchrotron Radiation Laboratory, 2005.
- [2] 赵籍九,尹兆升. 粒子加速器技术:第2章:加速器磁铁技术[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [3] 陈宛,尹兆升. BEPC II 弯转磁铁 67B 端部削斜的实验研究[C]//2008年 BEPC 运行年会. 北京:中国科学院高能物理研究所,2008.
- [4] HALBACH K, YOURD R. Table and graphs of first order perturbation effects in iron-dominated two-dimensional symmetrical multipoles, LBNL Internal report, UCRL-18961[R]. US: Berkeley Lawrence Radiation Lab, 1969.
- [5] HALBACH K. First order perturbation effects in iron-dominated two-dimensional symmetrical multipoles[J]. Nucl Instrum Methods, 1969, 74 (1): 147-164.
- [6] YIN Z S, WU Y Z, ZHANG J F, et al. Design and field measurement of the BEPC- II interaction region dual-aperture quadrupoles [J]. Nucl Instrum Methods Phys Res A, 2007, 573(324): 323-328.