

# POD 和 DMD 方法对燃料棒流致振动特性的分析

闵光云<sup>1</sup>, 姜乃斌<sup>1,2,\*</sup>

(1. 中山大学 中法核工程与技术学院, 广东 珠海 519082;  
2. 广东省极端条件重点实验室, 广东 东莞 523803)

**摘要:** 燃料棒的流致振动是造成燃料失效和反应堆停堆的重要因素之一, 研究其流致振动机理非常必要。本文建立了燃料棒的高保真有限元模型, 基于 ANSYS Batch 和随机振动理论批量计算了不同支撑刚度下燃料棒的流致振动响应, 并搭建了 1 个流致振动响应数据库。该数据库采用不同支撑刚度值来模拟和检查燃料棒可能遇到的情况。基于数据库组装快照矩阵, 采用两种数据驱动方法(POD 方法和 DMD 方法)搭建了 1 个高保真降阶模型(ROM), 该 ROM 能够实现流致振动响应的快速重构。对比了 POD 方法和 DMD 方法重构燃料棒流致振动响应的效果以及各自的优点和缺点。研究发现: 使用相同数量的模态重构燃料棒的流致振动响应时, POD 方法的重构效果优于 DMD 方法; 基于相同数量的模态重构时, 刚度为 1 N/mm 的重构效果最差, 这主要是因为刚度越小, 频率越小, 系统的振幅越大, 需要更多数量的模态才能捕捉大幅振动带来的影响; DMD 方法不仅能够高效地重构燃料棒的振动响应, 还能够判断每个 DMD 模态的稳定性。

**关键词:** POD; DMD; 流致振动; 模态; 燃料棒

中图分类号: TL352 文献标志码: A 文章编号: 1000-6931(2024)10-2162-11

doi: [10.7538/yzk.2023.youxian.0830](https://doi.org/10.7538/yzk.2023.youxian.0830)

## Analysis of Flow-induced Vibration Characteristics of Fuel Rods Using POD and DMD Methods

MIN Guangyun<sup>1</sup>, JIANG Naibin<sup>1,2,\*</sup>

(1. *Sino-French Institute of Nuclear Engineering and Technology, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China;*  
2. *Guangdong Provincial Key Laboratory of Extreme Conditions, Dongguan 523803, China*)

**Abstract:** The exploration of flow-induced vibration in fuel rods is of utmost importance as it plays a pivotal role in comprehending and mitigating factors that contribute to fuel failure and reactor shutdown. This understanding is crucial for advancing the nuclear energy industry. To unravel the intricacies of this complex phenomenon, a sophisticated high-fidelity finite element model of fuel rods was meticulously constructed. This model serves as the cornerstone for a computational analysis of flow-induced vibration responses utilizing ANSYS Batch, firmly roots in the principles of random vibration theory. In the pursuit of a profound understanding, support stiffness values to simulate and scrutinize diverse scenarios that fuel rods might encounter were systematically varied. The outcomes of these simulations were meticulously compiled to establish a comprehensive database of flow-induced

收稿日期: 2023-11-29; 修回日期: 2024-01-01

基金项目: 国家自然科学基金(11872060); 广东省重点领域研发计划(2021B0101250002)

\* 通信作者: 姜乃斌

vibration responses. This database stands as a valuable resource for future research endeavors and engineering applications within the nuclear energy domain. Taking a step forward, an innovative approach was adopted to streamline the analysis process. Leveraging the snapshot matrix derived from the extensive database, a high-fidelity reduced-order model (ROM) was developed. Two data-driven methodologies, namely proper orthogonal decomposition (POD) and dynamic mode decomposition (DMD) methods, were employed to construct the ROM. This ROM enables the rapid reconstruction of flow-induced vibration responses, facilitating efficient analysis and decision-making in real-world applications. A critical facet of this paper involves a comparative analysis of the reconstruction effectiveness of fuel rod flow-induced vibration responses using both the POD and DMD methods. The results of this comparison reveal that, when considering the reconstruction of vibration responses with the same number of modes, the POD method outperforms the DMD method. This finding underscores the importance of selecting appropriate methodologies based on specific objectives and computational efficiency. Furthermore, the results indicate that the DMD method excels not only in efficiently reconstructing the vibration responses of fuel rods but also offers the unique capability to assess the stability of each DMD mode. This dual functionality enhances the overall diagnostic capabilities of the DMD method, providing valuable insights into the dynamic behavior and potential instabilities of the fuel rod system. In conclusion, the exhaustive investigation outlined in this paper not only significantly contributes to the understanding of flow-induced vibration characteristics in fuel rods but also provides a robust framework for developing advanced models and methodologies for future research and practical applications in the nuclear energy industry. The comprehensive nature of our approach ensures that our findings are not only insightful but also applicable in shaping the future of nuclear energy technology.

**Key words:** POD; DMD; flow-induced vibration; mode; fuel rod

燃料棒是核反应堆<sup>[1]</sup>中的关键部件之一,受流体冲刷作用燃料棒会发生流致振动,且流致振动是造成燃料失效和反应堆停堆的重要因素之一<sup>[2]</sup>。因此,建立燃料棒的高保真有限元模型(FEM),并针对性地研究燃料棒的流致振动机理和流致振动行为一直以来都是一个热门的研究课题。例如,Kim等<sup>[3-4]</sup>使用ANSYS建立了燃料棒的高保真FEM,该FEM考虑了弹簧初始挠度和弹簧松弛等因素。接着,Kim等<sup>[3-4]</sup>基于FEM计算了燃料棒的振型和固有频率,然后基于Paidoussis经验公式估算了燃料棒的均方根振幅。黄恒等<sup>[5]</sup>将流体力视为脉冲荷载,基于功率谱分析方法从纯理论角度推导了轴向流作用下燃料棒的均方根振幅,并验证了其模型的精度和计算结果的准确性。黑宝平等<sup>[6]</sup>基于文献<sup>[5]</sup>的随机振动思想,进一步研究了液态钠中燃料棒的流致振动行为。研究发现,边通道附近的燃料棒的振动尤为显著,工程中需时刻关注边通道附近燃料棒的振

动状态。

燃料棒的流致振动会使得燃料棒与刚凸、弹簧片产生微动磨损,磨损严重时会导致刚凸和弹簧片的夹持失效,进而放大燃料棒的振动响应。基于此,齐欢欢等<sup>[7-9]</sup>研究了格架失效对燃料棒均方根振幅、流弹失稳以及漩涡脱落的影响。Jiang等<sup>[10]</sup>在文献<sup>[8]</sup>的基础上进一步对比了M310与EPR燃料棒的流致振动行为和格架失效对EPR流致振动行为的影响。研究发现:相比M310,EPR燃料棒的1阶频率略高,高阶频率变低,均方根振幅变大;格架失效会显著放大EPR燃料棒的振幅,EPR燃料棒端部格架失效时,其振幅最大。

基于此,本文首先基于ANSYS Batch和半经验随机振动公式得到1个燃料棒的流致振动响应数据库。该数据库采用不同支撑刚度值来模拟和检查燃料棒可能遇到的各种情况。然后,基于两种数据驱动方法<sup>[11-14]</sup>(本征正交分解(POD)方法和动态模态分解(DMD))搭建一个快速重构燃料棒

流致振动响应的高保真降阶模型(ROM)。最后,基于数值分析对比 POD 方法和 DMD 方法对燃料棒流致振动响应的重构效果以及各自的优点和缺点。

## 1 数值计算对象

### 1.1 几何模型

本文研究对象为 M310 机组的燃料棒,该燃料棒由多个部件组成,包括端塞、燃料芯块、压紧弹簧、包壳管和气腔室等部件。燃料棒长度为 3850.3 mm,包壳外径为 9.5 mm、内径为 8.36 mm。在冷却剂的冲刷作用下,燃料棒会发生大幅振动,因此沿着燃料棒的轴线方向设置了 8 个格架,格架对燃料棒有夹持作用,能够较大程度上抑制燃料棒的振动。每个格架上都带有 2 个弹簧片和 4 个刚凸,且沿对角线对称分布,如图 1 所示。

### 1.2 模型简化

燃料棒的简化:燃料棒的长径比较大,可视为一种细长结构,细长结构的变形主要是梁式变形,且可不考虑剪切应力的影响。因此,本文采用欧拉-伯努利梁模型,在 ANSYS Mechanical 中使用 BEAM4 单元离散。

刚凸和弹簧片的简化:参考文献 [8],本文采用弹簧模型来模拟刚凸和弹簧片对燃料棒的夹持作用,这主要是因为弹簧模型相比接触单元稳定

性高、易收敛。因此,在 ANSYS Mechanical 中使用 COMBIN14 单元离散。

### 1.3 流固耦合计算方案

对于流固耦合,流体力可分为两部分:与结构运动相关的流体力和与结构运动无关的流体力。与结构运动相关的流体力可用结构的位移、速度和加速度来表示,这分别对应于流体的附加刚度、附加阻尼和附加质量,详见式(1)。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_s \mathbf{X} &= \mathbf{F}_m(t) + \mathbf{F}_e(t) = \\ &(-\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}_a \mathbf{X}) + \mathbf{F}_e(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{M}_s$ 、 $\mathbf{C}_s$ 、 $\mathbf{K}_s$  分别为结构的质量、阻尼、刚度矩阵;  $\mathbf{F}_m(t)$ 、 $\mathbf{F}_e(t)$  分别为与运动相关、运动无关的流体力;  $\mathbf{M}_a$ 、 $\mathbf{C}_a$ 、 $\mathbf{K}_a$  分别为流体的附加质量、附加阻尼、附加刚度矩阵。

图 1 所示的受多个格架夹持的燃料棒看作是多点支撑系统,这种系统通常具有较高的临界速度和较大的结构刚度,因此流体附加刚度和附加阻尼可忽略,仅考虑流体附加质量的影响。本文流体附加质量通过修改密度的方式体现。

### 1.4 几何参数和物理参数

燃料棒的模态受到刚度分布和质量分布的影响。本文只考虑包壳的弯曲刚度,这主要是燃料芯块是一块一块堆砌而成,几乎不提供弯曲刚度。但燃料芯块的质量必须计算在燃料包壳的总

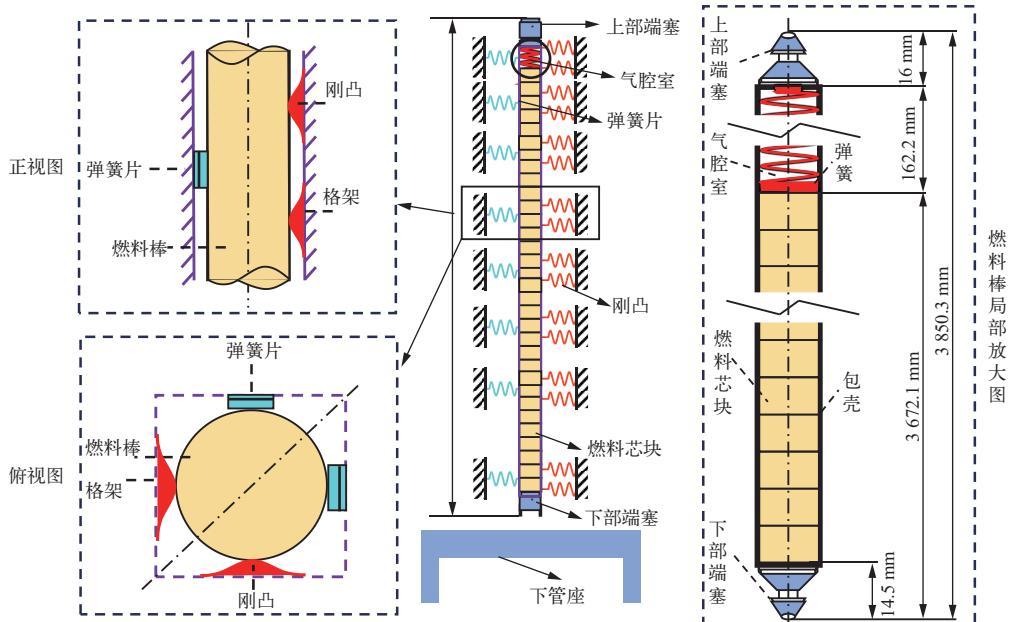


图 1 燃料棒结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of fuel rod structure

质量中。因此,燃料棒包壳的等效密度总值应包括流体的等效密度、燃料包壳密度以及其他部分的等效密度,具体表达式为:

$$\rho_{\text{eq}} = \zeta \rho_{\text{eq,w}} + \rho_c + \rho_{\text{eq,i}} \quad (2)$$

式中:  $\rho_c$  为包壳的密度;  $\rho_{\text{eq,i}}$  为除包壳外其他部分的等效密度;  $\rho_{\text{eq,w}}$  为流体的等效密度;  $\zeta$  为流体附加质量系数。附加质量系数的取值参考文献 [15], 本文取值 2.4。

将其他部分的质量折算入对应的包壳管材料密度中可得到湿模态分析所需的质量参数, 即端塞段 0.579 2 kg/m、芯块段 0.793 6 kg/m、气腔段 0.222 4 kg/m。此外, 端塞的材料为铝合金, 其杨氏模量为 4.36 GPa、泊松比为 0.37; 包壳的材料为 Zr-4, 其杨氏模量为 92.1 GPa、泊松比为 0.37。

### 1.5 燃料棒流致振动响应计算

工程中燃料棒流致振动响应计算通常基于半经验公式<sup>[8]</sup>。即,首先根据压水堆燃料棒的结构和流场分布特征,采用功率谱密度表征湍流激励,然后结合相关功率谱密度试验参数,求解燃料棒每阶模态振动响应的均方值。

根据文献 [16], 对于第  $i$  阶模态, 在  $x$  处由轴向流产生的燃料棒均方根振幅为:

$$\begin{aligned} \sigma_a[y_i(x)] &= C_a D \Phi_i(x) \frac{\rho D^2}{\rho_{\text{eq}}} \left( \frac{1}{\delta_i} \right)^{0.5} \cdot \\ &\quad \left( \frac{D}{L} \right)^{0.5} \left( \frac{U_{ae}}{f_i D} \right)^{\frac{3+Q_a}{2}} \left[ \frac{L}{\int_0^L \Phi_i^2(x) dx} \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\sigma_a[y_i(x)]$  为第  $i$  阶模态的轴向流均方根振幅;  $C_a$  和  $Q_a$  为轴向流体力系数;  $D$  为燃料棒直径;  $\Phi_i(x)$  为振型;  $\rho$  为流体密度;  $\delta_i$  为阻尼比;  $L$  为燃料棒长度;  $U_{ae}$  为等效轴向流速;  $f_i$  为第  $i$  阶固有频率。

对于第  $i$  阶模态, 在  $x$  处由横向流产生的燃料棒均方根振幅为:

$$\begin{aligned} \sigma_t[y_i(x)] &= C_t D \Phi_i(x) \frac{\rho D^2}{\rho_{\text{eq}}} \left( \frac{1}{\delta_i} \right)^{0.5} \left( \frac{D}{L} \right)^{0.5} \cdot \\ &\quad \left[ \frac{\int_0^L \left( \frac{U_t(x)}{f_i D} \right)^{3+Q_t} \Phi_i^2(x) dx}{\int_0^L \Phi_i^2(x) dx} \right]^{0.5} \left[ \frac{L}{\int_0^L \Phi_i^2(x) dx} \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (4)$$

式中:  $\sigma_t[y_i(x)]$  为第  $i$  阶模态的横向流均方根振幅;  $C_t$  和  $Q_t$  为横向流体力系数;  $U_t$  为横向流速。

为了保守计算, 把轴向流、横向流产生的幅值

线性叠加, 即:

$$\sigma_i(x) = \sigma_t[y_i(x)] + \sigma_a[y_i(x)] \quad (5)$$

总振幅由每阶模态的振幅组合求得, 模态组合通常有好几种方式, 本文采用常见于文献的组集模态, 即采用 10% 频率组合将各振型组集在一起, 详见文献 [8]。

$$\sigma(x) = \left[ \sum_{i=1}^N \sigma_i^2(x) + 2 \sum_{\substack{j=1, N \\ i=1, j-1}} \beta_{ij} \sigma_i(x) \sigma_j(x) \right]^{1/2} \quad (6)$$

式中,  $\beta_{ij}$  为组合系数, 如果频率之间的相对偏差小于 10%, 那么  $\beta_{ij}=0.5$ , 否则  $\beta_{ij}=0$ 。

## 2 POD 方法

快照(Snapshots)的概念最初由 Sirovich<sup>[12]</sup> 提出, 其核心思想是将数据投影到 1 个低维空间, 以最大化数据在该空间中的方差。例如: 假设存在  $n$  个采样点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 每个采样点的响应值为  $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ 。通过  $i$  次采样, 可获得 1 个快照矩阵, 即:

$$X_U = \begin{bmatrix} U_1(x_1) & U_2(x_1) & \cdots & U_i(x_1) \\ U_1(x_2) & U_2(x_2) & \cdots & U_i(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_1(x_n) & U_2(x_n) & \cdots & U_i(x_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中:  $n$  为单元节点数;  $U$  为对应的流致振动响应值;  $i$  为快照数。

POD 算法的目的是找到一组最优正交基(或称为 POD 模态), 即:

$$\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j] \quad (8)$$

寻找最优正交基的过程可等效为一个数学问题:

$$J = \max_{\varphi} \sum_{j=1}^n \frac{(X_U, \varphi)^2}{\|\varphi\|^2} \quad (9)$$

式(9)可进一步转化为特征值分解问题, 即:

$$X_U X_U^T \varphi_i = \lambda \varphi_i \quad (10)$$

通常情况下 Snapshots 矩阵  $X_U$  的行数远大于  $X_U$  的列数, 矩阵  $X_U X_U^T$  的维度也将远大于矩阵  $X_U^T X_U$  的维度。因此, 为了减小特征值分解过程中的计算量, 引入协方差矩阵  $R$ :

$$R = X_U^T X_U \quad (11)$$

首先, 求解维度较低的协方差矩阵  $R$  的特征

值和特征向量:

$$R\phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (12)$$

随后, 可获得 POD 模态, 即:

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X_U \phi_i \quad (13)$$

ROM 可表示为 POD 模态的线性组合, 即:

$$X_{U\_ROM} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad (14)$$

式中,  $\alpha_i$  为 POD 模态系数, 可通过 Snapshots 矩阵  $X_U$  和 POD 模态  $\varphi$  求内积获得<sup>[13]</sup>。

为了选择尽可能少的 POD 模态, 可基于模态能量占比( $I(h)$ )对模态进行截断。 $I(h)$  可表示为式(12)所示特征值与所有特征值之和的比值, 即:

$$I(h) = \sum_{i=1}^k \lambda_i / \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (15)$$

式中,  $k$  为模态截断的阶数。通常  $I(h)$  的值应大于 99.5%。本文搭建的 POD 算法流程图如图 2 所示。

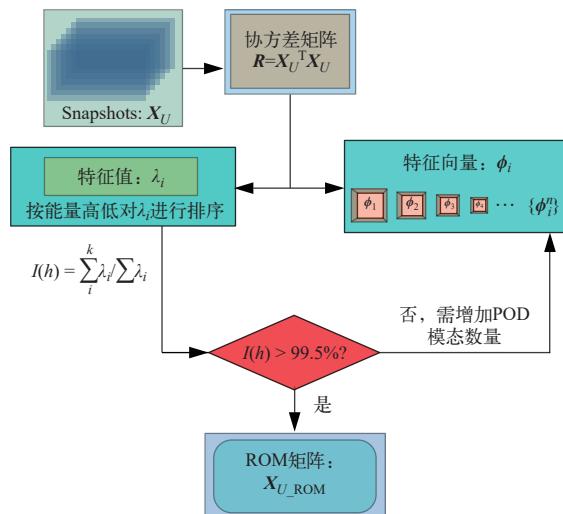


图 2 POD 算法流程图  
Fig. 2 Process of building POD algorithm

### 3 DMD 方法

DMD 方法与 POD 方法类似, DMD 算法也强烈依赖于 Snapshots 矩阵。假设存在  $n$  个采样点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 每个采样点的响应值为  $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ 。采样  $i$  次, 可组装 2 个快照矩阵, 即:

$$X_1 = \begin{bmatrix} U_1(x_1) & U_2(x_1) & \cdots & U_{i-1}(x_n) \\ U_1(x_2) & U_2(x_2) & \cdots & U_{i-1}(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_1(x_n) & U_2(x_n) & \cdots & U_{i-1}(x_n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} U_2(x_1) & U_3(x_1) & \cdots & U_i(x_n) \\ U_2(x_2) & U_3(x_2) & \cdots & U_i(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_2(x_n) & U_3(x_n) & \cdots & U_i(x_n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

如果采样数  $i$  充分大, 可近似认为动力学系统为 1 个线性系统, 即存在 1 个高维线性矩阵  $A$ , 使得:

$$U_{i+1} = AU_i \quad (18)$$

通常情况下, 想要直接获得矩阵  $A$  非常困难, 因此可通过找寻与矩阵  $A$  具有相同特征值的相似矩阵, 并通过相似变换得到矩阵  $A$ 。同时, 为了达到降阶的目的, 在相似变换中可人为地将奇异值约为 0 的高阶项省略, 只考虑前  $k$  阶, 即:

$$A \approx MFM^T \quad (19)$$

式中:  $A$  为  $k$  阶方阵; 矩阵  $M$  可通过对矩阵  $X_1$  进行奇异值分解(SVD)而得, 即:

$$X_1 = M\Sigma V^T \quad (20)$$

式中:  $M$  为  $X_1$  的左奇异矩阵, 也叫做  $X_1$  的 POD 模态;  $V$  为右奇异矩阵;  $\Sigma$  为对角矩阵, 对角线的元素称为奇异值。

将式(19)、(20)代入式(18)可得:

$$F \triangleq M^T X_2 V \Sigma^{-1} \quad (21)$$

式中,  $F$  为  $k$  阶方阵, 相比全尺度的  $n$  阶方阵, 实现了降阶的目的。

矩阵  $F$  进一步可转化为:

$$F = [y_1, y_2, \dots, y_k] \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_k & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中:  $y_i$  为矩阵  $F$  的特征向量;  $\alpha_i$  为幅值, 其值越大表示初始条件对系统的影响越显著。 $y_i$  和  $\alpha_i$  满足下式:

$$\alpha_i^T y_k = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (23)$$

使用 DMD 模态线性估计 Snapshots 矩阵可得到:

$$U_i \approx \sum_i^k \varphi_i H_i = \sum_i^k \varphi_i \mu_i^k \alpha_i \quad (24)$$

进一步可得:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ddots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mu_1 & \cdots & \mu_1^{i-1} \\ 1 & \mu_2 & \cdots & \mu_2^{i-1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & \mu_k & \cdots & \mu_k^{i-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中,  $\varphi_i = \mathbf{M}\mathbf{y}_i$

DMD 方法最为关键的结论是获得了 DMD 模态  $\varphi_i$  和特征值  $\mu_i$ 。 $\lg(\mu_i/\Delta t)$  的实部表示增长率, 而  $\lg(\mu_i/\Delta t)$  的虚部代表频率。正增长率表示该阶模态是不稳定, 负增长率表示该阶模态是稳定, 零增长率表示该阶模态是周期振动的。

为了选择尽可能少的 DMD 模态, 与 POD 方法类似, 可基于模态能量占比对模态进行截断。根据文献 [11], 这个模态能量占比  $J(h)$  可表示为:

$$J(h) = \sum_{i=1}^k \|\varphi_i \mathbf{H}_i\|^2 / \sum \|\varphi_i \mathbf{H}_i\|^2 \quad (26)$$

式中,  $k$  为模态截断的阶数。通常  $J(h)$  的值应大于 99.5%。

本文搭建的 DMD 算法流程图示于图 3。

## 4 结果对比分析

### 4.1 数据库搭建

工程中对于燃料棒流致振动响应的计算通常是基于半经验公式, 本文也采用这种方式求解燃料棒的流致振动响应。首先, 通过模态分析求得模态  $\Phi_i(x)$ , 该模态分析基于 ANSYS Mechanical 完成; 接着, 根据式(3)~(6)求解燃料棒的流致振动响应, 式(3)~(6)的推导过程详见文献 [16]; 最后, 采用不同支撑刚度值来模拟和检查燃料棒可

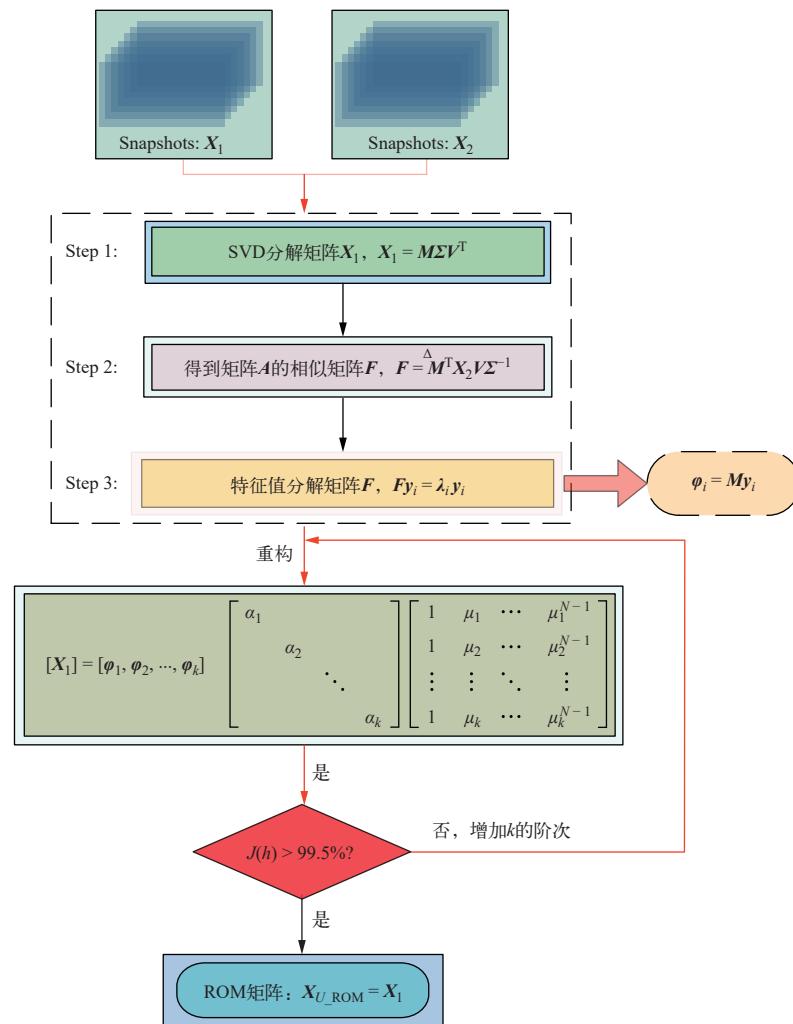


图 3 DMD 流程图

Fig. 3 Process of building DMD algorithm

能遇到的各种情况,将不同刚度(范围为  $1 \sim 10^4 \text{ N/mm}$ )对应的流致振动响应组装 Snapshots 矩阵  $\mathbf{X}_0$ 、 $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$ , 为 POD 和 DMD 方法提供输入数据。具体步骤(Step)如下。

Step1: 基于 ANSYS Batch 的批处理功能, 批量计算 APDL\_1, APDL\_2, …, APDL\_401, 并将模态结果以 txt 的格式输出并保存。

Step2: 基于 MATLAB 编写求解燃料棒流致振动响应的脚本，并批量计算燃料棒的流致振动响应。

Step3: 基于 MATLAB 导出不同刚度对应的流致振动响应, 并组装 Snapshots 矩阵  $X_U$ ,  $X_1$  和  $X_2$ 。

Step4: 基于 MATLAB 编写 POD 和 DMD 方法的代码, 重构 Snapshots 矩阵。

本文搭建的流致振动响应数据库计算流程图示于图4。

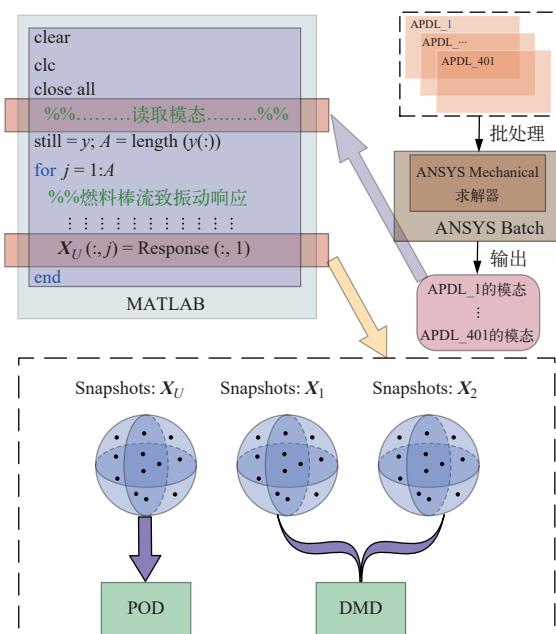


图 4 流致振动响应数据库计算流程  
Fig. 4 Calculation process for database  
of flow induced vibration response

## 4.2 POD 结果

根据流致振动响应数据库中的数据组装  $\mathbf{S}^{\text{Snapshots}}$  矩阵  $\mathbf{X}_U$ , 然后进行 POD 分解, 可得到对应的 POD 模态与 POD 能量占比。前 10 阶 POD 模态对应的特征值  $\lambda$  (对数坐标) 以及 POD 能量占比 ( $I$ ) 示于图 5。

根据式(15)计算的模态能量占比  $I$  进行 POD 模态的截断, 搭建 1 个 ROM, 该 ROM 能快速重构

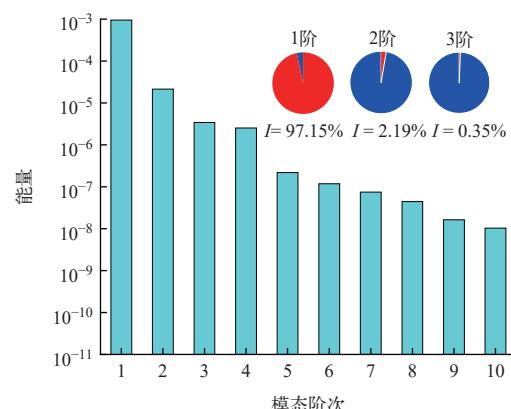


图 5 前 10 阶 POD 模态对应的能量

Fig. 5 Energy of first 10 order POD modes

燃料棒的流致振动响应。从图5可知,第1阶POD模态能量占比为97.15%,第2阶为2.19%,第3阶为0.35%;前3阶POD模态总能量占比为99.69%。因此,基于ROM重构燃料棒的流致振动响应至少需要截取前3阶POD模态作为投影子空间,即 $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ 。

刚度为 1、9.77、977.24 N/mm 对应的燃料棒流致振动响应重构曲线示于图 6。从图 6 可发现,如果基于前 3 阶 POD 模态重构燃料棒的流致振动响应,刚度为 1 N/mm 的重构效果较差,需要增加 POD 模态的数量;当使用前 4 阶 POD 模态重构刚度为 1 N/mm 对应的流致振动响应时,重构效果明显增加。对于刚度为 9.77 N/mm 和 977.24 N/mm 下流致振动响应的重构,使用前 3 阶 POD 模态的效果明显优于刚度为 1 N/mm 的,造成这种差异的原因可解释为刚度越小,系统越柔,频率越低,振幅越大。振幅越大,系统需要更多的 POD 模态才能捕捉大幅振动带来的影响。

### 4.3 DMD 结果

根据流致振动响应数据库中的数据组装 Snapshots 矩阵  $X_1$  和  $X_2$ , 然后进行 DMD 分解, 可得到对应的 DMD 模态与 DMD 能量占比。前 10 阶 DMD 模态对应的能量占比示于图 7。

根据式(26)计算的模态能量占比  $J$  进行 DMD 模态的截断, 搭建 1 个快速计算燃料棒流致振动响应的 ROM。从图 7 可知, 第 1 阶 DMD 模态能量占比为 49.20%, 第 2 阶为 37.18%; 第 3 阶为 12.96%。前 3 阶 DMD 模态能量占比为 99.34%。基于 ROM 重构燃料棒的流致振动响应至少需要

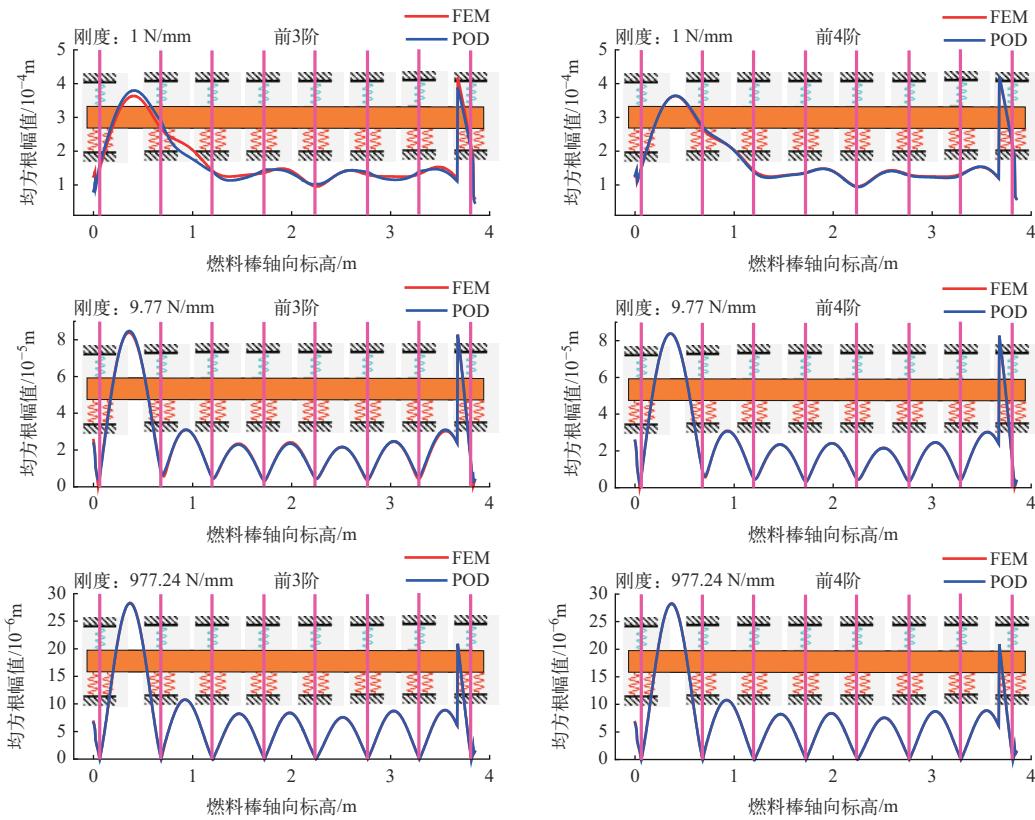


图 6 基于 POD 方法的不同刚度下的振动响应重构曲线

Fig. 6 Vibration response curve under different stiffness based on POD method

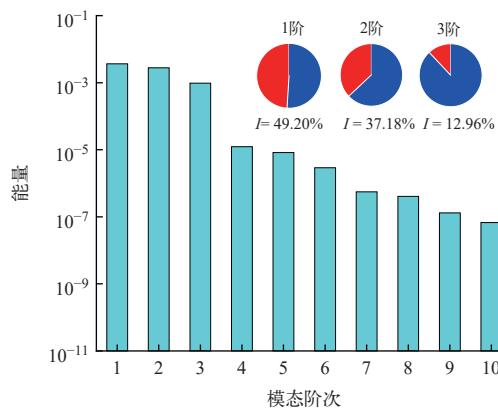


图 7 前 10 阶 DMD 模态对应的能量

Fig. 7 Energy of first 10 order DMD modes

截取前 4 阶 DMD 模态作为投影子空间(第 4 阶 DMD 模态能量占比为 0.17%, 前 4 阶 DMD 模态能量占比为 99.51%), 即  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]$  才能使得模态能量占比大于 99.50%。

使用 DMD 方法对刚度为 1、9.77、977.24 N/mm 的流致振动响应重构, 重构后的响应曲线示于图 8。从图 8 可发现, 与 POD 重构效果相比, 使用相同数量的模态, DMD 的重构效果较差。基于相同数

量的 DMD 模态重构时, 刚度为 1 N/mm 的重构效果最差, 这同样可解释为刚度越小, 频率越小, 系统的振幅越大, 需要更多数量的 DMD 模态才能捕捉大幅振动带来的影响。

图 9 为特征值实部随虚部的变化曲线, 图 10 为增长率随频率的变化曲线。结合图 9 和图 10 可判断每阶 DMD 模态的稳定性以及增长率。从图 10 可知, 大部分模态对应的增长率的绝对值较大, 位于单位圆内部, 说明其为衰减较快的稳定模态。少部分模态对应的增长率的绝对值较小, 位于单位圆附近, 说明其为衰减缓慢的周期性模态。有 1 个模态对应的增长率正数, 且对应的频率为 0, 其为静态模态。

#### 4.4 POD 和 DMD 方法对比

图 11、12 分别为 POD 模态和 DMD 模态。对比图 11、12 可知, POD 方法和 DMD 方法不仅在能量占比上有明显的差异, 在模态上也存在明显的差异, 正是这种差异造成了使用这两种方法重构燃料棒流致振动响应的重构效果不一致。

POD 方法使用较少的 POD 模态就能较好地

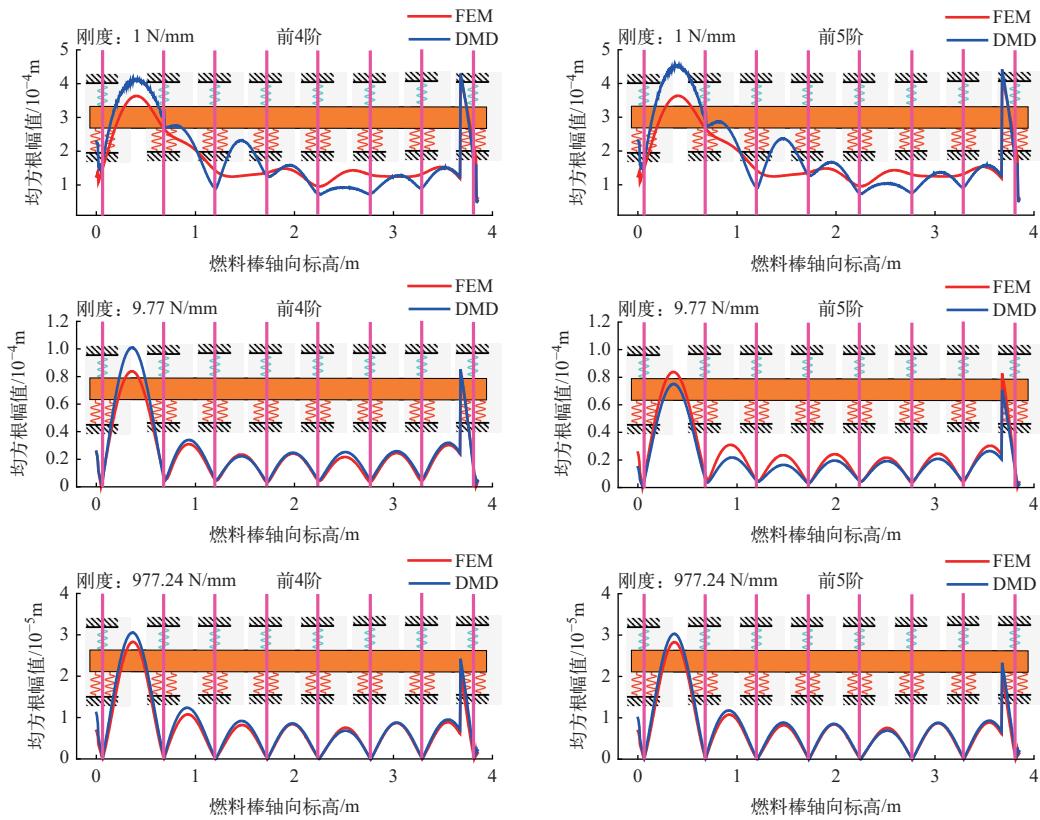


图 8 基于 DMD 方法的不同刚度下的振动响应重构曲线

Fig. 8 Vibration response curve under different stiffness based on DMD method

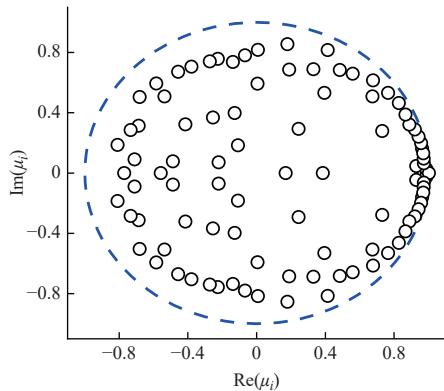


图 9 特征值的实部随虚部的变化

Fig. 9 Real part of eigenvalues with imaginary part

重构燃料棒的流致振动响应,这主要是因为相同数量的 POD 模态相比相同数量的 DMD 模态的能量占比较高。相比 POD 方法, DMD 方法需要更多数量的 DMD 模态才能达到较好的重构效果,但 DMD 方法不仅能够重构流致振动响应,还能够判断 DMD 模态的稳定性,这是 POD 方法不具备的优势。因此,在工程中针对燃料棒流致振动响应的重构,选取 POD 方法还是 DMD 方法需要根据实际的工程情况而决定。

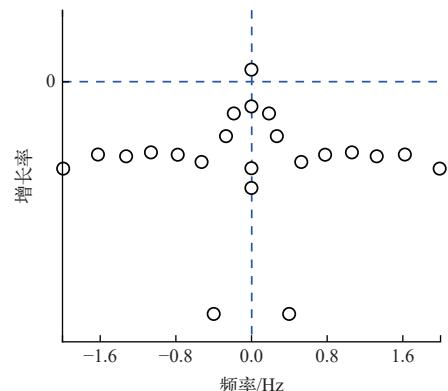


图 10 增长率随频率的变化

Fig. 10 Growth rate with frequency

无论是基于 POD 方法还是 DMD 方法,计算燃料棒流致振动响应所耗时间相比全尺度的流致振动响应计算所花时间都呈量级式下降。因此,当 POD 或 DMD 模态数量选择合适时,POD 方法和 DMD 方法都能高效、精准地重构燃料棒的流致振动响应。相比 DMD 方法,POD 方法能够用较小数量的 POD 模态就能对燃料棒的流致振动响应进行重构,主要是 POD 模态携带的能量相比 DMD 模态更多。但相比 POD 方法,DMD 方法还

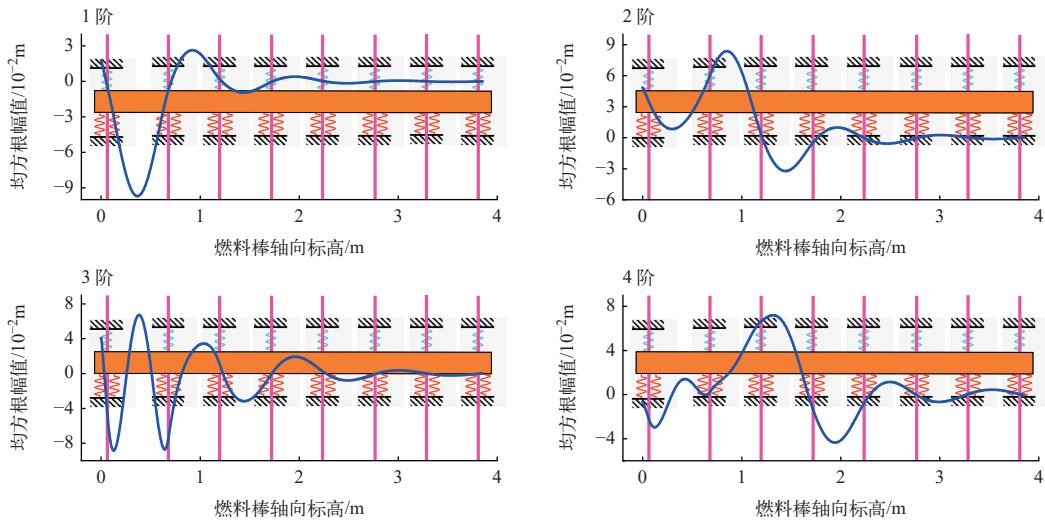


图 11 前 4 阶 POD 模态

Fig. 11 First 4-order POD mode

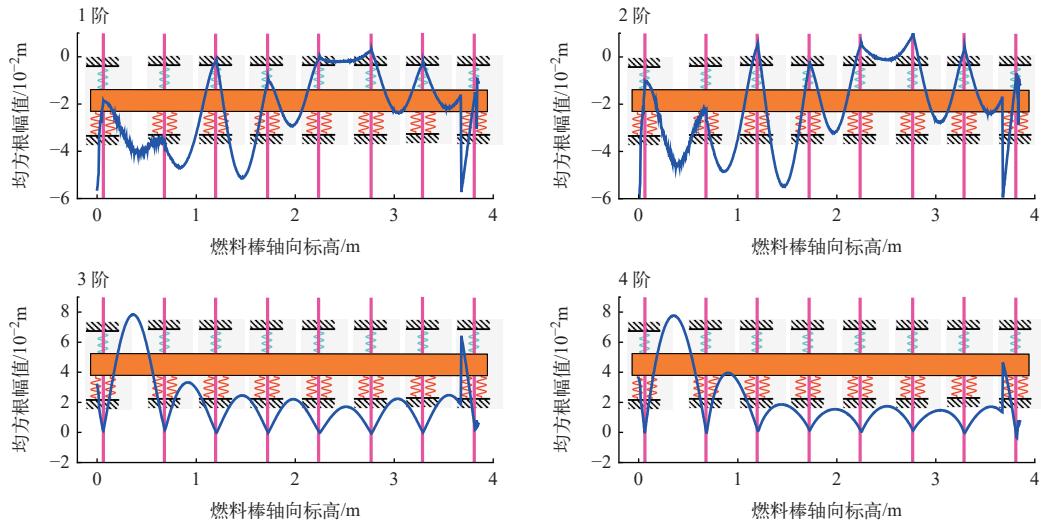


图 12 前 4 阶 DMD 模态

Fig. 12 First 4-order DMD mode

能判断模态的稳定性,这是 POD 方法不具备的优势,因此核工程中针对燃料棒流致振动响应的计算,需要结合这两种方法的优势。

## 5 结论

本文基于 ANSYS Batch 得到了不同刚度下燃料棒流致振动响应数据库,基于流致振动响应数据库组装了 Snapshots 矩阵  $X_U$ 、 $X_1$  和  $X_2$ ,为 POD 和 DMD 方法提供输入数据。基于 POD 和 DMD 方法分析了燃料棒的流致振动响应,对比了两种方法对燃料棒流致振动响应的重构效果。所得结论如下。

1) 针对不同刚度下燃料棒流致振动响应的重构,刚度越小所需 POD 模态数量越多。这主要是因为刚度越小,系统的频率越小、振幅越大,需要更多的 POD 模态才能捕捉大幅振动带来的影响。

2) 针对相同刚度下燃料棒流致振动响应的重构,相比 POD 方法, DMD 方法需要更多数量的 DMD 模态才能达到良好的重构效果,这主要是因为相同数量的 POD 模态相比 DMD 模态的能量占比较高;

3) 相比 POD 方法, DMD 方法不仅能重构流致振动响应,还能判断 DMD 模态的稳定性,这是 POD 方法不具备的优势。

## 参考文献:

- [1] 高李霞, 李朋洲, 赖姜, 等. 反应堆结构的磨蚀研究现状[J]. 核动力工程, 2016, 37(增刊2): 73-76.  
GAO Lixia, LI Pengzhou, LAI Jiang, et al. Status for fretting-wear study of nuclear structural components[J]. Nuclear Power Engineering, 2016, 37(S2): 73-76(in Chinese).
- [2] 陈德奇, 刘海东, 黄彦平, 等. 带格架  $5\times 5$  燃料棒束流致振动特性数值研究[J]. 原子能科学技术, 2018, 52(5): 954-960.  
CHEN Deqi, LIU Haidong, HUANG Yanping, et al. Numerical study on flow-induced vibration characteristics of  $5\times 5$  rod bundle with spacer grid[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2018, 52(5): 954-960(in Chinese).
- [3] KIM H K, LEE Y H, LEE K H. On the geometry of the fuel rod supports concerning a fretting wear failure[J]. Nuclear Engineering and Design, 2008, 238(12): 3321-3330.
- [4] KIM K T. The study on grid-to-rod fretting wear models for PWR fuel[J]. Nuclear Engineering and Design, 2009, 239(12): 2820-2824.
- [5] 黄恒, 刘彤, 周跃民. 压水堆燃料棒在轴向流作用下的随机振动响应研究[J]. 原子能科学技术, 2015, 49(3): 468-472.  
HUANG Heng, LIU Tong, ZHOU Yuemin. Random response analysis of PWR fuel rod effect on axial flow[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2015, 49(3): 468-472(in Chinese).
- [6] 黑宝平, 高付海, 李晓轩. 轴向流动液态钠中燃料元件的振动响应分析[J]. 地震工程与工程振动, 2017, 37(4): 189-193.  
HEI Baoping, GAO Fuhai, LI Xiaoxuan. Analysis of vibration response of fuel pin induced by liquid sodium in axial flow[J]. Earthquake Engineering and Engineering, 2017, 37(4): 189-193(in Chinese).
- [7] 齐欢欢, 冯志鹏, 姜乃斌, 等. 格架夹持失效对燃料棒流弹稳定性及漩涡脱落影响的数值研究[J]. 核动力工程, 2018, 39(4): 182-186.  
QI Huanhuan, FENG Zhipeng, JIANG Naibin, et al. Numerical study on effect of clamping failure on flow induced vibration and fretting wear analysis of fuel rods[J]. Nuclear Power Engineering, 2018, 39(4): 182-186(in Chinese).
- [8] 齐欢欢, 冯志鹏, 姜乃斌, 等. 格架松弛对燃料棒湍流激励及微振磨损的影响研究[J]. 原子能科学技术, 2018, 52(10): 1810-1816.  
QI Huanhuan, FENG Zhipeng, JIANG Naibin, et al. Effect of grid relaxation on turbulence excitation and fretting wear of fuel rod[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2018, 52(10): 1810-1816(in Chinese).
- [9] 齐欢欢, 冯志鹏, 吴万军, 等. 压水堆燃料棒包壳微振磨损计算方法[J]. 核动力工程, 2017, 38(5): 54-57.  
QI Huanhuan, FENG Zhipeng, WU Wanjun, et al. Method for calculation of fretting wear of PWR fuel rod cladding[J]. Nuclear Power Engineering, 2017, 38(5): 54-57(in Chinese).
- [10] JIANG N, MIN G, FANG Z, et al. Investigation on vibration response characteristics and influencing factors of the fuel rods of EPR[J]. Frontiers in Energy Research, 2022, 10: 990525.
- [11] LI D, ZHAO B, WANG J. Data-driven identification of coherent structures in gas-solid system using proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition[J]. Physics of Fluids, 2023, 35(1): 013321.
- [12] SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, III: Dynamics and scaling[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 583-590.
- [13] 谢海润, 吴亚东, 欧阳华, 等. 基于本征正交分解和动态模态分解的尾涡激振现象瞬态过程的模态分析[J]. 上海交通大学学报, 2020, 54(2): 176-185.  
XIE Hairun, WU Yadong, OUYANG Hua, et al. Modeal analysis of wake induced vibration transient process based on POD and DMD[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2020, 54(2): 176-185(in Chinese).
- [14] 寇家庆, 张伟伟, 高传强. 基于 POD 和 DMD 方法的跨声速抖振模态分析[J]. 航空学报, 2016, 37(9): 2679-2689.  
KOU Jiaqing, ZHANG Weiwei, GAO Chuanqiang. Modal analysis of transonic buffet based on POD and DMD method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(9): 2679-2689(in Chinese).
- [15] 朱勇, 秦加明, 任红兵, 等. 基于 ANSYS 的蒸汽发生器传热管流致振动分析程序[J]. 核动力工程, 2014, 35(4): 17-20.  
ZHU Yong, QIN Jiaming, REN Hongbing, et al. Flow-induced vibration analysis of steam generator heat transfer tube based on ANSYS[J]. Nuclear Power Engineering, 2014, 35(4): 17-20(in Chinese).
- [16] 姜乃斌, 冯志鹏, 岐峰刚, 等. 核工程中的流致振动理论与应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2018.